



***Facultad
de
Ciencias***

**¿Qué es...una matriz aleatoria?
(What is...a random matrix?)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Cristina Vallejos Valdor

Director: Carlos Beltrán Álvarez

Junio-2020

Índice general

Resumen	I
1. Introducción y estructura	1
2. Preliminares	3
2.1. Conceptos previos	3
2.1.1. Espacios probabilísticos	3
2.1.2. Variables aleatorias	4
2.2. Matrices aleatorias	5
2.2.1. Funciones características de matrices aleatorias simétricas	6
2.3. Grupos topológicos	7
2.3.1. El grupo topológico $GL(n, \mathbb{C})$	8
2.4. Medida de Haar	12
2.5. Cuaterniones. Grupo simpléctico	14
2.5.1. Cuaterniones	14
2.5.2. Representación matricial de los cuaterniones	15
2.5.3. Matrices cuaterniónicas	15
3. Colectividades Gaussianas de matrices aleatorias	17
3.1. Matrices de Wigner	17
3.2. GOE, GUE y GSE	19
3.3. Valores propios de las colectividades Gaussianas	25
3.3.1. Demostración del Teorema 3.3.1	27
3.3.2. Polinomios ortogonales y GUE	30
3.3.3. Funciones de correlación de los valores propios de la GUE	36
4. Colectividades circulares de matrices aleatorias	39
4.1. CUE, COE y CSE	39
4.2. Matrices aleatorias unitarias distribuidas con la medida de Haar	42
4.3. Algunos comentarios sobre los valores propios de las colectividades circulares	47
Bibliografía	49
A. Código	51

Resumen

El estudio de matrices cuyos elementos son variables aleatorias, o simplemente, teoría de matrices aleatorias, es un área de investigación activa de física matemática y probabilidad, con importantes aplicaciones en múltiples disciplinas de física, matemáticas puras y aplicadas e ingeniería.

El objetivo en este trabajo es presentar una introducción a la teoría básica de matrices aleatorias. Se llevará a cabo un estudio detallado de las denominadas colectividades Gaussianas y colectividades circulares de matrices aleatorias, incluyendo en ambos casos, un análisis de la distribución y propiedades de los valores propios.

Palabras clave: Matrices aleatorias, medida de Haar, colectividades Gaussianas, colectividades circulares, distribución de los valores propios.

Abstract

The study of matrices whose entries are random variables, or simply, random matrix theory, is an active research area of mathematical physics and probability, with important applications in multiple disciplines of science, engineering and finance.

The aim in this work is to present an introduction to the basic theory of random matrices. A detailed study of the so-called Gaussian ensembles and circular ensembles of random matrices will be carried out, including in both cases, an analysis of the distribution and properties of the eigenvalues.

Keywords: Random matrices, Haar measure, Gaussian ensembles, circular ensembles, eigenvalue distribution.

Capítulo 1

Introducción y estructura

Las matrices aleatorias aparecieron por primera vez a principios de 1928 en estadística como matrices de covarianza muestral. No obstante, no fue hasta mediados de los años 50, cuando las matrices aleatorias y en particular, la distribución de sus valores propios fueron objeto de intenso estudio. Motivado por aplicaciones en física nuclear, el físico y matemático húngaro Eugene Wigner, propuso una teoría basada en matrices aleatorias para explicar el comportamiento estadístico local de los niveles energéticos. En mecánica cuántica, los niveles energéticos de un sistema están descritos por los valores propios de un operador hermítico definido en un espacio de Hilbert, denominado Hamiltoniano. La idea de Wigner consistió en modelar dicho Hamiltoniano por medio de matrices aleatorias de talla grande cuyos elementos fueran independientes.

Desde entonces, las matrices aleatorias se han convertido en una importante herramienta estadística, empleándose como método indirecto para resolver variedad de problemas de matemáticas y física. En las últimas décadas, la teoría de matrices aleatorias ha encontrado aplicaciones en numerosas disciplinas de ciencia e ingeniería, incluyendo entre otras, teoría de números y combinatoria, caos cuántico, comunicaciones inalámbricas, finanzas y economía.

En este trabajo presentaremos una introducción a la teoría de matrices aleatorias. En el Capítulo 2, se establecen gran parte de los conceptos que serán utilizados a lo largo del trabajo. En primer lugar, y con objeto de enunciar la definición formal de matriz aleatoria y modelo de matrices aleatorias (Definiciones 2.2.1 y 2.2.4 respectivamente), comenzaremos proporcionando diversas nociones de teoría de probabilidad vistas en el grado, recordando en particular, los conceptos de variable aleatoria y espacio probabilístico. A continuación, abordamos un breve resumen sobre grupos topológicos. Concretamente, probaremos que el grupo unitario de grado n , que denotamos $U(n)$, es un grupo topológico compacto, lo cual nos permitirá garantizar la existencia de una única (salvo un factor de proporcionalidad positivo) medida de Haar sobre dicho grupo. Por último, en tanto que trataremos ciertas matrices aleatorias toman valores en el anillo de los cuaterniones de Hamilton, al final del Capítulo 2 dedicaremos un apartado a la introducción de esta extensión de los números reales, en la que también definiremos la noción de grupo simpléctico, que es la generalización del grupo unitario a los cuaterniones.

Por lo que respecta al tercer capítulo de la memoria, comenzaremos definiendo una de las primeras matrices aleatorias consideradas, las matrices de Wigner. En este contexto, enunciaremos el Teorema de Wigner, resultado elemental en teoría de matrices aleatorias, el cual establece que la distribución empírica de los valores propios de una matriz de Wigner $n \times n$ converge en probabilidad a la distribución del semicírculo cuando $n \rightarrow \infty$. Seguidamente, iniciaremos el estudio de los modelos de matrices aleatorias probablemente más estudiados, las colectividades Gaussianas o colectividades clásicas de matrices aleatorias (GOE, GUE y GSE). Se trata de espacios probabilísticos $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio de matrices simétricas, hermitianas o auto-duales

de dimensión $n \times n$ y \mathbb{P} es invariante por transformaciones ortogonales, unitarias o simplécticas respectivamente. Incluiremos además, la prueba uno de los principales resultados del trabajo: el teorema que proporciona la expresión explícita de la función de densidad de la distribución conjunta de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Ortogonal. Para terminar, aludiremos a la relación existente entre la Colectividad Gaussiana Unitaria y un tipo particular de polinomios ortogonales, los polinomios de Hermite, y definiremos las funciones de correlación de los valores propios de este modelo de matrices aleatorias.

Finalmente, en el cuarto capítulo llevaremos a cabo un estudio de las colectividades circulares. Además, expondremos un método para generar en la práctica matrices unitarias elegidas al azar según la medida de Haar en el grupo unitario, es decir, realizaciones de matrices aleatorias unitarias cuya distribución es la medida de Haar en dicho grupo. Para ello, necesitaremos primero introducir otros modelos de matrices aleatorias: las colectividades de Ginibre. La idea fundamental detrás del procedimiento a seguir será obtener la (única) factorización QR de una realización de una matriz aleatoria de la Colectividad de Ginibre Compleja, y tomar la matriz unitaria Q resultante de dicha descomposición. Por último, nos referiremos brevemente a los valores propios de las colectividades circulares.

Capítulo 2

Preliminares

A lo largo de este segundo capítulo estableceremos las definiciones y notación necesaria para sentar las bases del estudio que llevaremos a cabo posteriormente acerca de los modelos de matrices aleatorias ya mencionados en la introducción. Comenzaremos presentando el concepto de matriz aleatoria, para lo que primeramente introduciremos los espacios probabilísticos generales y la noción de variable aleatoria. Una vez realizado el repaso de contenidos que se suponen suficientemente conocidos por haber sido estudiados en el grado, desarrollamos temas que en cierta medida resultan novedosos en el sentido de no haber profundizado en ellos en cursos anteriores, tales como la medida de Haar en un grupo topológico localmente compacto o el anillo de división de los cuaterniones.

2.1. Conceptos previos

Para desarrollar los contenidos de esta sección, tomamos a [3] y [16] como referencia principal.

2.1.1. Espacios probabilísticos

Definición 2.1.1. Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Diremos que σ es una σ -álgebra, si verifica que:

- $\Omega \in \sigma$.
- Si $A \in \sigma$, entonces $A^c \in \sigma$, donde A^c representa el conjunto complementario de A .
- Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \sigma$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma$.

Definición 2.1.2. Se llama *espacio medible* a cualquier par (Ω, σ) , donde Ω es un conjunto no vacío y σ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Los elementos de σ se llaman conjuntos medibles.

Sea Ω un conjunto no vacío. A partir de la definición de σ -álgebra, se comprueba directamente que si $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ es una familia de σ -álgebras de subconjuntos de Ω , entonces

$$\sigma = \bigcap_{i \in I} \sigma_i \tag{2.1}$$

es una σ -álgebra.

Definición 2.1.3. Sea Ω un conjunto no vacío y sea \mathcal{C} una familia de subconjuntos de Ω . Se llama σ -álgebra engendrada por \mathcal{C} , a la σ -álgebra intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} . Es la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{C} . Se le suele representar con la notación $\sigma(\mathcal{C})$.

Definición 2.1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se llama σ -álgebra de Borel sobre X a la σ -álgebra engendrada por τ . Denotaremos $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$. Sus elementos se denominan *conjuntos de Borel* o *borelianos* y si $X = \mathbb{R}$, se utiliza la notación \mathcal{B} .

Ejemplo 2.1.5. Los abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff también los compactos (por el teorema de Heine-Borel, son cerrados).

Definición 2.1.6. Una *medida* en un espacio medible (Ω, σ) es una aplicación no negativa

$$\mu : \sigma \longrightarrow [0, \infty]$$

que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Es numerablemente aditiva: dados $A_1, \dots, A_n \in \sigma$ disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (2.2)$$

Llamamos *espacio de medida* a cualquier terna (Ω, σ, μ) , donde μ es una medida sobre la σ -álgebra σ de Ω . Si $\mu(\Omega) = 1$, μ se denomina *probabilidad* o *medida de probabilidad* y (Ω, σ, μ) *espacio probabilístico*.

2.1.2. Variables aleatorias

Definición 2.1.7. Dados dos espacios medibles (Ω, σ) y (Ω^*, σ^*) se llama *variable aleatoria* a cualquier aplicación

$$X : (\Omega, \sigma) \longrightarrow (\Omega^*, \sigma^*) \quad (2.3)$$

tal que $X^{-1}(B) \in \sigma$ para cada $B \in \sigma^*$, esto es cualquier aplicación medible X . En particular, se dice que X es una variable aleatoria real si $\Omega^* = \mathbb{R}$ y $\sigma = \mathcal{B}$.

Ejemplo 2.1.8. Dados dos espacios medibles (Ω, σ) y (Ω^*, σ^*) , si $\sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ o $\sigma^* = \{\emptyset, \Omega^*\}$, es obvio que toda aplicación $X : \Omega \longrightarrow \Omega^*$ es variable aleatoria.

Ejemplo 2.1.9. Sea (Ω, σ) un espacio medible. Sea $A \subseteq \Omega$. Si $A \in \sigma$, el indicador de A es variable aleatoria. En efecto, se llama indicador de A a la aplicación $I_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $\omega \in \Omega$ como:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \quad (2.4)$$

Entonces, las contraímagenes de cualquier conjunto por esta aplicación sólo pueden ser \emptyset , Ω , A o A^c . Por tanto, es claro que si $A \in \sigma$, I_A es variable aleatoria.

Definición 2.1.10. Sean (Ω, σ) , (Ω^*, σ^*) dos espacios medibles y μ una medida sobre σ . Sea $X : (\Omega, \sigma) \longrightarrow (\Omega^*, \sigma^*)$ una variable aleatoria. La *medida imagen* de μ por X es la medida $\mu \circ X^{-1}$ sobre σ^* definida por

$$\begin{aligned} \mu \circ X^{-1} : \quad \sigma^* &\longrightarrow [0, \infty] \\ B &\longmapsto \mu(X^{-1}(B)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Definición 2.1.11. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio probabilístico $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$.

- La probabilidad $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ se llama *distribución de X* . Escribiremos $X \sim \mathbb{P}_X$ y decimos que X tiene distribución \mathbb{P}_X .
- Si X es una variable aleatoria real, la aplicación $F_X : x \longmapsto \mathbb{P}[X \leq x]$ se denomina *función de distribución de X* .
- Una familia $(X_i)_{i \in I}$ de variables aleatorias se dice que están igualmente distribuidas si $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_{X_j}$ para cada $i, j \in I$. Escribiremos $X \stackrel{d}{=} Y$ si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

2.1.2.1. Independencia de variables aleatorias

Definición 2.1.12. Sea (Ω^*, σ^*) un espacio medible y sea Ω un conjunto no vacío. Sea $X: \Omega \rightarrow \Omega^*$ una aplicación. La familia de subconjuntos

$$X^{-1}(\sigma^*) := \{X^{-1}(A) : A \in \sigma^*\}, \quad (2.6)$$

es la σ -álgebra más pequeña respecto de la cual X es variable aleatoria. Diremos que $\sigma(X) := X^{-1}(\sigma^*)$ es la σ -álgebra sobre Ω generada por X .

Definición 2.1.13. Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$ un espacio probabilístico y para cada $i \in I$, donde I un conjunto de índices arbitrario, sea $\sigma_i \subseteq \sigma$ una σ -álgebra. Diremos que la familia $(\sigma_i)_{i \in I}$ es *independiente* si, para cada subconjunto finito $J \subseteq I$ y cualquier elección de conjuntos medibles $A_j \in \sigma_j$, $j \in J$, se tiene que

$$\mathbb{P}[\cap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]. \quad (2.7)$$

Para cada $i \in I$, sea (Ω_i, σ_i) un espacio medible y sea $X_i: (\Omega, \sigma) \rightarrow (\Omega_i, \sigma_i)$ una variable aleatoria con σ -álgebra generada $\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\sigma_i)$.

Definición 2.1.14. La familia $(X_i)_{i \in I}$ de variables aleatorias se dice *independiente* si la familia $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ de σ -álgebras es independiente.

Definición 2.1.15. Para cada $i \in I$, sea X_i una variable aleatoria real definida en un espacio probabilístico $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$. Para cada conjunto finito $J \subseteq I$, sea

$$\begin{aligned} F_J := F_{(X_j)_{j \in J}}: \quad \mathbb{R}^J &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}[X_j \leq x_j, \forall j \in J] = \mathbb{P}\left[\cap_{j \in J} X_j^{-1}((-\infty, x_j])\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Entonces F_J se llama *función de distribución conjunta* de $(X_j)_{j \in J}$ y la probabilidad $\mathbb{P}_{(X_j)_{j \in J}}$ sobre \mathbb{R}^J se denomina *distribución conjunta* de $(X_j)_{j \in J}$.

Teorema 2.1.16. Una familia $(X_i)_{i \in I}$ de variables aleatorias reales es independiente si y sólo si, para cada conjunto finito $J \subseteq I$ y $x = (x_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$,

$$F_J(x) = \prod_{j \in J} F_{X_j}(x_j). \quad (2.9)$$

Corolario 2.1.17. En las condiciones del Teorema 2.1.16, supongamos que para cada $j \in J$, F_J tiene función de densidad $f_J = f_{(X_j)_{j \in J}}$. Esto es, existe una función continua $f_J: \mathbb{R}^J \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$F_J(x) = \int_{-\infty}^{x_n} \left(\cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots \right) dt_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^J \quad (2.10)$$

En este caso, la familia $(X_j)_{j \in J}$ es independiente si y sólo si, para cada subconjunto finito $J \subseteq I$,

$$f_J(x) = \prod_{j \in J} f_j(x_j) \quad \forall x \in \mathbb{R}^J. \quad (2.11)$$

2.2. Matrices aleatorias

Una vez introducido el concepto de variable aleatoria, procedemos a presentar la definición formal de matriz aleatoria y modelo de matrices aleatorias. En los Capítulos 2 y 3 desarrollamos con cierto detalle aspectos sobre ambas nociones, incluyendo en particular, el estudio en profundidad de determinados modelos de matrices aleatorias. Denotemos $\mathcal{M}_{p \times n}(R)$ el espacio de matrices de dimensión $p \times n$ con entradas en un anillo R .

Definición 2.2.1. Una *matriz aleatoria* es una variable aleatoria X que toma valores en $\mathcal{M}_{p \times n}(R)$.

Asimismo, podemos interpretar una matriz aleatoria como una matriz de dimensión $p \times n$, cuyos elementos son variables aleatorias definidas en un mismo espacio probabilístico. Las entradas de las matrices aleatorias consideradas habitualmente en la teoría de matrices aleatorias son reales, complejas o cuaterniónicas. Generalmente, se enfoca el estudio en el caso $p = n$.

Observación 2.2.2. Es importante enfatizar que si $X = (X_{ij})$ es una matriz aleatoria, las variables aleatorias X_{ij} no se suponen independientes. En particular, posteriormente trataremos matrices aleatorias cuyos elementos son variables fuertemente dependientes.

Ejemplo 2.2.3. Sean X_1, \dots, X_n vectores aleatorios independientes con distribución normal p -variante $N_p(0, \Sigma)$, de media 0 y matriz de covarianzas Σ . Consideremos la matriz $p \times n$ $X = [X_1, \dots, X_n]$. Entonces, la matriz aleatoria $M = XX^T$ tiene distribución de Wishart con n grados de libertad y matriz de covarianzas Σ . Se denota $M \sim W_p(n, \Sigma)$. Para $n \geq p$, la función de densidad de M es

$$f(M)dM = \frac{1}{2^{\frac{np}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{n}{2}} \Gamma_p(\frac{n}{2})} (\det \Sigma)^{(n-p-1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1} M) \right\} dM, \quad (2.12)$$

donde $dM := \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} dM_{ij}$. Aquí, $\Gamma_p(\alpha)$ es la función gamma multivariada definida como

$$\Gamma_p(\alpha) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma \left(\frac{2\alpha + 1 - i}{2} \right). \quad (2.13)$$

Estas matrices aleatorias se llaman *matrices de Wishart*.

Definición 2.2.4. Un *modelo de matrices aleatorias*, es un espacio probabilístico $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$, donde Ω es un conjunto de matrices.

2.2.1. Funciones características de matrices aleatorias simétricas

Definición 2.2.5. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio probabilístico $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$. Entonces la esperanza matemática de X , que denotamos $\mathbb{E}[X]$, se define como la cantidad

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}. \quad (2.14)$$

Definición 2.2.6. Sea X una variable aleatoria escalar. Se llama función característica de X a la función $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Ejemplo 2.2.7. Si X es una variable aleatoria real con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\varphi_X(t) = \exp \left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Si X e Y son dos variables aleatorias tales que $\varphi_X = \varphi_Y$, entonces $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, i.e sus distribuciones coinciden. De hecho, el recíproco también es cierto. Introducimos a continuación la definición del concepto de función característica de una matriz aleatoria simétrica. En lo que sigue, denotamos G_n el espacio de las matrices simétricas $n \times n$.

Definición 2.2.8. Sea X una matriz aleatoria simétrica. La función característica de X se define por

$$\begin{aligned} \Phi_X : \quad G_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ M &\longmapsto \Phi_X(M) = \mathbb{E}[\exp\{i \text{Tr}(X^T M)\}] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si X y M son dos matrices simétricas arbitrarias, entonces

$$\text{Tr}(X^T M) = \sum_{j=1}^n (X^T M)_{jj} = \sum_{j,k=1}^n X_{kj} M_{kj} = \sum_{j,k=1}^n X_{jj} M_{jj} + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} X_{jk} M_{jk}. \quad (2.18)$$

En consecuencia, en el caso en que X sea una matriz aleatoria se tendrá que

$$\Phi_X(M) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i \sum_{j,k=1}^n X_{jj} M_{jj} + 2i \sum_{1 \leq j < k \leq n} X_{jk} M_{jk} \right\} \right]. \quad (2.19)$$

Además, si los elementos de X son independientes, la función característica de X coincide con el producto de las funciones características de cada coordenada de la matriz:

$$\Phi_X(M) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp\{i M_{jj} X_{jj}\}] \prod_{j,k=1}^n \mathbb{E}[\exp\{2i M_{kj} X_{kj}\}] \quad (2.20)$$

Proposición 2.2.9. Sea X una matriz aleatoria simétrica. Sea $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y sea $M \in G_n$. Entonces

$$\Phi_X(B^T M B) = \Phi_{B^T X B}(M). \quad (2.21)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \Phi_X(B^T M B) &= \mathbb{E}[\exp\{i(\text{Tr}((X^T B^T M B)))\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{i(\text{Tr}((B^T X^T B M)))\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{i(\text{Tr}([B^T X^T B]^T M))\}] = \Phi_{B^T X B}(M), \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde la segunda igualdad se sigue de la propiedad cíclica de la traza. \square

2.3. Grupos topológicos

En esta sección, introducimos la definición del concepto de grupo topológico, y su aplicación a nuestros objetos de estudio.

Definición 2.3.1. Un *grupo topológico* (G, τ, \cdot) es un grupo G provisto de una topología τ , tal que las operaciones de grupo:

$$\begin{aligned} m_G: G \times G &\longrightarrow G, & n_G: G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy & x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

son continuas considerando la topología producto en $G \times G$.

Ejemplo 2.3.2. Algunos de ejemplos de grupos topológicos son:

- Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ en G , como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.
- \mathbb{R}^n con la topología usual y la operación suma.
- La circunferencia unidad \mathbb{S}^1 con la topología relativa a \mathbb{C} y la multiplicación de números complejos.

Definición 2.3.3. Un grupo topológico (G, τ, \cdot) es *localmente compacto* si (G, τ) es Hausdorff y localmente compacto, es decir, si para cada $x \in G$, existe un entorno compacto de x .

Ejemplo 2.3.4. \mathbb{R}^n con la topología usual y más en general, espacios normados de dimensión finita son localmente compactos. \mathbb{Q} y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con la topología usual de \mathbb{R} y la suma como operación de grupo no son localmente compactos.

2.3.1. El grupo topológico $GL(n, \mathbb{C})$

A continuación, estableceremos que el grupo general lineal sobre \mathbb{C} es un grupo topológico. Esto nos permitirá ver al grupo unitario como subgrupo topológico de $GL(n, \mathbb{C})$ y por lo tanto como grupo topológico con la topología de subespacio. Además, probaremos que este último es compacto, lo que nos permitirá garantizar la existencia de una medida invariante en $U(n)$, como veremos más adelante.

Definición 2.3.5. Se llama *grupo general lineal* de grado n sobre un cuerpo \mathbb{K} , $GL(n, \mathbb{K})$ al grupo de matrices invertibles $n \times n$ con entradas en \mathbb{K} , con el producto de matrices como operación de grupo.

Introducimos a continuación una colección de resultados que nos serán de utilidad para probar posteriormente que en efecto, el grupo general lineal sobre \mathbb{C} es grupo topológico. Los siguientes lemas preliminares, así como su demostración se toman de [4].

Lema 2.3.6. Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2), (W, \tau'_1), (Z, \tau'_2)$ espacios topológicos. Si las aplicaciones $f : X \rightarrow W, g : Y \rightarrow Z$ son continuas, entonces la siguiente aplicación también es continua

$$\begin{aligned} h : (X \times Y, \mathcal{A}) &\longrightarrow (W \times Z, \mathcal{N}) \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde \mathcal{A}, \mathcal{N} son las topologías producto de $X \times Y$ y $W \times Z$, respectivamente.

Demostración:

Sean $\mathcal{B}_1 = \{U_1 \times V_2 : U_1 \in \tau_1, V_2 \in \tau_2\}$ base de \mathcal{A} y $\mathcal{B}_2 = \{U'_1 \times V'_2 : U'_1 \in \tau'_1, V'_2 \in \tau'_2\}$ base de \mathcal{N} . Sea $C \in \mathcal{B}_2$, entonces existen $U'_1 \in \tau'_1, V'_2 \in \tau'_2$ tal que $C = U'_1 \times V'_2$. Entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(U'_1 \times V'_2) = \{(x, y) \in X \times Y : (f(x), g(y)) \in U'_1 \times V'_2\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \in U'_1\} \cap \{(x, y) \in X \times Y : g(y) \in V'_2\} \\ &= [f^{-1}(U'_1) \times Y] \cap [X \times g^{-1}(V'_2)] = [f^{-1}(U'_1)] \times [g^{-1}(V'_2)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora bien, como f y g son continuas, U'_1, V'_2 , abiertos de W y Z respectivamente, tenemos que $f^{-1}(U'_1) \in \tau_1, g^{-1}(V'_2) \in \tau_2$. Concluimos que $h^{-1}(C) \in \mathcal{B}_1$ y h es continua. \square

Lema 2.3.7. Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos, $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ homeomorfismo y $A \subseteq X, A \neq \emptyset$. Sea \mathcal{W} la topología relativa de τ_1 en A y \mathcal{Z} la topología relativa de τ_2 en $f(A)$. Entonces $\varphi = f|_A$ es homeomorfismo sobre $f(A)$.

Demostración:

Veamos que $f|_A$ es homeomorfismo:

- φ es biyectiva: φ es inyectiva por ser f inyectiva y es obvio que φ es suprayectiva sobre $f(A)$.
- φ es continua. Sea $Z \in \mathcal{Z}$, existe $V \in \tau_2$ tal que $Z = V \cap f(A)$. Así, $\varphi^{-1}(Z) = \varphi^{-1}(V \cap f(A)) = f^{-1}(V \cap f(A)) = f^{-1}(V) \cap A$. Luego como $V \in \tau_2$ y f es continua, $f^{-1}(V) \in \tau_1$, y por definición de \mathcal{W} , $\varphi^{-1}(Z) = f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{W}$ y φ es continua.
- Como φ es biyectiva, $\exists \varphi^{-1}$ y su continuidad se prueba de modo similar al caso anterior.

\square

Proposición 2.3.8. $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}), \tau_1)$ y $(\mathbb{C}^{n^2}, \tau_2)$ son homeomorfos, siendo τ_1 es la topología inducida por una métrica sobre $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, y τ_2 la topología inducida por la norma-2.

Demostración:

Consideremos la aplicación lineal,

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{n^2} \\ Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} &\longmapsto (z_{11}, \dots, z_{1n}, z_{21}, \dots, z_{2n}, \dots, z_{n1}, \dots, z_{nn}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Veamos que Φ es homeomorfismo.

- Φ es biyectiva:

Φ es inyectiva. En efecto, sean $Z = (z_{ij}), U = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, tal que $\Phi(A) = \Phi(B)$. Entonces, se tiene que $z_{ij} = u_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, de donde se sigue trivialmente que $Z = U$.

Φ es sobreyectiva. Sea $z = (z_1, \dots, z_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2}$. Bastará tomar

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n^2-n+1} & \cdots & z_{n^2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

y resulta que $\Phi(Z) = z$.

- Φ es continua: teniendo en cuenta que $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ y \mathbb{C}^{n^2} son espacios normados y Φ lineal, Φ es un operador lineal entre ellos, por lo que bastará ver que Φ es acotado, es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que $\forall Z \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $\|\Phi(Z)\| \leq C\|Z\|$. Además, notar que se trata de espacios normados de dimensión finita, por lo que todas las normas son equivalentes. En particular, tomaremos en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, la norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$

$$\|Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |z_{ij}|^2}, \quad (2.28)$$

mientras que en \mathbb{C}^{n^2} elegiremos la norma-2,

$$\|(z_1, \dots, z_{n^2})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} |z_i|^2}. \quad (2.29)$$

Sean $Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$.

$$\|\Phi(Z)\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |z_{ij}|^2} = \|Z\|_F \quad (2.30)$$

Luego Φ es un operador lineal acotado con norma 1. De hecho es una isometría.

- Φ^{-1} es continua. Comprobaremos de nuevo que Φ^{-1} (que existe pues Φ es biyectiva) es un operador lineal acotado. Sea $z = (z_1, \dots, z_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2}$, se tiene que:

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ z_{n+1} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n^2-n+1} & \cdots & z_{n^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}). \quad (2.31)$$

y $\|\Phi^{-1}(z)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} |z_i|^2} = \|z\|_2$. Luego Φ^{-1} es continua.

□

En lo que sigue, dada $Z = (z_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, denotaremos $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ a

$$\Phi(Z) = (z_{11}, \dots, z_{1n}, z_{21}, \dots, z_{2n}, \dots, z_{n1}, \dots, z_{nn}), \quad (2.32)$$

donde $z_{ij} = u_{(i-1)n+j}$, $1 \leq i, j \leq n$ y llamaremos λ , al homeomorfismo $\Phi|_{GL(n, \mathbb{C})}$ sobre $\Phi(GL(n, \mathbb{C}))$, esto es

$$\lambda = \Phi|_{GL(n, \mathbb{C})}: \quad \begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \\ Z & \longmapsto & \Phi(Z) \end{array} \quad (2.33)$$

Lema 2.3.9. *La aplicación*

$$h: \quad \begin{array}{ccc} \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \times \Phi(GL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \\ (x, y) & \longmapsto & \lambda(\lambda^{-1}(x) \cdot \lambda^{-1}(y)) \end{array} \quad (2.34)$$

es continua.

Demostración:

Sean $x, y \in \Phi(GL(n, \mathbb{C}))$ y denotemos por $X = \lambda^{-1}(x)$, $Y = \lambda^{-1}(y) \in GL(n, \mathbb{C})$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Se tiene que,

$$XY = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_{1k}y_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n x_{1k}y_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_{nk}y_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n x_{nk}y_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Por tanto, si aplicamos ahora λ , $\lambda(XY) = (d_1, \dots, d_n) = h(x, y)$, donde la última igualdad se sigue de la definición de h y $c_{ij} = d_{(i-1)n+j}$, $1 \leq i, j \leq n$. Así, cada componente de h es una función continua y en consecuencia, h es continua. □

Lema 2.3.10. *La aplicación*

$$\Theta: \quad \begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \times \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \\ (Z, U) & \longmapsto & (\lambda(Z), \lambda(U)) \end{array} \quad (2.37)$$

es continua.

Demostración:

Se deduce del Lema 2.3.7, puesto que λ es continua. □

Lema 2.3.11. *La aplicación,*

$$g: \quad \begin{array}{ccc} \Phi(GL(n, \mathbb{C})) & \longrightarrow & \Phi(GL(n, \mathbb{C})) \\ z & \longmapsto & \lambda(Z^{-1}) \end{array} \quad (2.38)$$

es continua, siendo $Z \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\lambda(Z) = z$.

Demostración:

Sea $z \in \Phi(GL(n, \mathbb{C}))$ y $Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\lambda(Z) = z$. Sea $Z^{-1} = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL(n, \mathbb{C})$ donde $c_{ij} = \det(Z)^{-1}(-1)^{i+j}\det(Z_{ij})$, siendo $Z_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, la matriz obtenida suprimiendo la fila i y la columna j de Z . Si aplicamos ahora λ obtenemos que $\lambda(Z^{-1}) = (d_1, \dots, d_{n^2}) = g(z)$, $c_{ij} = d_{(i-1)n+j}$ $1 \leq i, j \leq n$, por lo que cada componente de g es continua por ser cociente de aplicaciones continuas y concluimos que g es continua. \square

La prueba se toma del siguiente resultado se toma de [4], generalizando el caso de $GL(n, \mathbb{R})$ allí expuesto, a los números complejos.

Proposición 2.3.12. *El grupo general lineal de orden n sobre \mathbb{C} , $GL(n, \mathbb{C})$, es un grupo topológico.*

Demostración:

En primer lugar, consideremos el espacio topológico $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}), \tau)$, donde $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ denota el espacio de las matrices $n \times n$ sobre \mathbb{C} y τ la topología generada a partir de considerar $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ espacio normado, y por tanto, espacio métrico. Tenemos que

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}. \quad (2.39)$$

Obviamente $(GL(n, \mathbb{C}), \cdot)$ es grupo con el producto usual de matrices y por definición, $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Por tanto, la familia $\mathcal{W} = \{GL(n, \mathbb{C}) \cap U : U \in \tau\}$ es una topología sobre $GL(n, \mathbb{C})$, que dota a $GL(n, \mathbb{C})$ de estructura de subespacio topológico de $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}), \tau)$. Por tanto, bastará probar que las aplicaciones

$$\begin{aligned} m_{GL(n, \mathbb{C})}: \quad GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ (Z, U) &\longmapsto ZU \\ n_{GL(n, \mathbb{C})}: \quad GL(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ Z &\longmapsto Z^{-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

son continuas. Probemos en primer lugar la continuidad de $m_{GL(n, \mathbb{C})}$. Retomamos las aplicaciones λ, h, Θ , definidas en la Proposición 2.3.8 y en los Lemas 2.3.9, 2.3.10 respectivamente. Veremos que $m_{GL(n, \mathbb{C})} = \lambda^{-1} \circ h \circ \Theta$. De este modo, $m_{GL(n, \mathbb{C})}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Sean $Z, U \in GL(n, \mathbb{C})$, se tiene :

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \circ h \circ \Theta(Z, U) &= \lambda^{-1}(h(\lambda(Z), \lambda(U))) \\ &= \lambda^{-1}(\lambda(\lambda^{-1}(\lambda(Z)) \cdot \lambda^{-1}(\lambda(U)))) \\ &= \lambda^{-1}(\lambda(Z \cdot U)) \\ &= Z \cdot U \\ &= m_{GL(n, \mathbb{C})}((Z, U)). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para demostrar la continuidad de $n_{GL(n, \mathbb{R})}$, comprobaremos que $n_{GL(n, \mathbb{C})} = \lambda^{-1} \circ g \circ \lambda$. Sea $Z = (Z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL(n, \mathbb{C})$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(g(\lambda(Z))) &= \lambda^{-1}(g(u_1, \dots, u_{n^2})) \\ &= \lambda^{-1}(\lambda(Z^{-1})) \\ &= Z^{-1} \\ &= n_{GL(n, \mathbb{C})}(Z). \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $z_{ij} = u_{(i-1)n+j}$, $1 \leq i, j \leq n$. □

Definición 2.3.13. El *grupo unitario* de grado n , denotado $U(n)$, es el grupo de matrices unitarias $n \times n$ con el producto de matrices como operación de grupo.

Definición 2.3.14. Sea G un grupo topológico y S un subgrupo de G . Si dotamos a S con la topología relativa como subespacio topológico de G , entonces S es también grupo topológico. El grupo topológico S se recibe el nombre de *subgrupo topológico* de G .

Proposición 2.3.15. El grupo unitario de grado n , $U(n)$ es un grupo topológico compacto.

Demostración:

Tenemos que $U(n)$ es subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$, por lo que, de acuerdo con la Definición 2.3.14, $U(n)$ es grupo topológico. Además, sabemos que $\lambda: \Phi|_{GL(n, \mathbb{C})} \longrightarrow \Phi(GL(n, \mathbb{C}))$ es homeomorfismo, por lo que $GL(n, \mathbb{C})$ es homeomorfo a un abierto U de \mathbb{C}^{n^2} . Por consiguiente, bastará ver que $U(n)$ es cerrado y acotado.

- $U(n)$ es cerrado en $GL(n, \mathbb{C})$: Consideremos la aplicación continua

$$\begin{aligned} f: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ Z &\longmapsto Z \cdot Z^* \end{aligned} \tag{2.43}$$

Como $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es homeomorfo a \mathbb{C}^{n^2} , $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ es Hausdorff y por tanto el conjunto $\{I_n\}$ es cerrado. Así, como $U(n) = f^{-1}(\{I_n\})$, $U(n)$ es cerrado por ser la contraimagen de un cerrado por una aplicación continua.

- $U(n)$ es acotado. Sea $Z \in U(n)$, calculamos $\|Z\|_F = \sqrt{\text{Tr}(Z \cdot Z^*)}$, donde $\|\cdot\|_F$ es la denominada norma matricial de Frobenius, se tiene que $\|Z\|_F = \sqrt{n}$ y $U(n)$ es acotado.

□

2.4. Medida de Haar

En 1933, Alfréd Haar demostró la existencia de una medida de Haar izquierda en grupos topológicos Hausdorff, compactos y separables. André Weil generalizó este resultado a grupos topológicos localmente compactos arbitrarios y mostró que, además es única salvo producto por una constante multiplicativa positiva. La medida de Haar es una generalización de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n a un grupo topológico localmente compacto G , en el sentido de que es invariante por la acción de grupo.

Definición 2.4.1. Una medida positiva definida en la σ -álgebra de Borel sobre un espacio topológico Hausdorff localmente compacto se denomina *medida de Borel*.

Definición 2.4.2. Sea μ una medida de Borel en un espacio Hausdorff localmente compacto X y sea $E \in \mathcal{B}(X)$

- Se dice que μ es *regular exterior* en E si $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto}\}$.
- Se dice que μ es *regular interior* en E si $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compacto}\}$.

Definición 2.4.3. Una *medida de Radon* en X es una medida de Borel finita sobre conjuntos compactos, regular exterior sobre conjuntos borelianos y regular interior sobre conjuntos abiertos.

Definición 2.4.4. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Decimos que una medida de Radon μ es

- Una *medida de Haar izquierda*, si es invariante por traslación izquierda, es decir $\mu(xA) = \mu(A)$ para todo $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(X)$.
- Una *medida de Haar derecha*, si es invariante por traslación derecha, es decir $\mu(Ax) = \mu(A)$ para todo $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(X)$.

Proposición 2.4.5. Sea G un grupo topológico. Si μ es una medida de Haar a izquierda en G , entonces $\mu(U) > 0$ para cada abierto $U \subseteq G$.

Demostración:

Como μ es regular exterior sobre conjuntos borelianos y no nula, existe un compacto $K \subseteq G$ con $\mu(K) > 0$. Sea U un abierto no vacío de G , entonces K se puede cubrir por un número finito de traslaciones de U , es decir, existen $x_1 \cdots x_n \in G$ tal que $K \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$. Luego

$$0 < \mu(K) \leq \mu(\cup_{i=1}^n x_i U) \leq \sum_{i=1}^n \mu(x_i U) = \sum_{i=1}^n \mu(U) = n\mu(U). \quad (2.44)$$

por lo que ha ser $\mu(U) > 0$. □

El siguiente resultado garantiza la existencia y unicidad (salvo un factor de proporcionalidad positivo) de una medida de Haar izquierda en cualquier grupo topológico localmente compacto. Puede consultarse una prueba del teorema en [13].

Teorema 2.4.6. Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces, existe una medida de Haar izquierda en G . Además, si μ y μ' dos medidas de Haar izquierdas en G , entonces existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = a\mu'$.

Observación 2.4.7. Si G es un grupo topológico compacto, la medida de Haar μ en G es finita, por lo que es habitual normalizarla.

Ejemplo 2.4.8. La medida de Lebesgue sobre el grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$ es un ejemplo de medida de Haar izquierda y derecha.

A partir de la medida de Haar izquierda en un grupo localmente compacto G dado, podemos definir una medida de Haar derecha en G . El siguiente resultado muestra como obtener esta medida:

Proposición 2.4.9. Sea G un grupo topológico localmente compacto y sea μ una medida de Haar izquierda en G . Para cada $A \in \mathcal{B}(G)$, denotemos A^{-1} el conjunto de inversos de elementos de A . Entonces la medida μ' definida como

$$\mu'(A) = \mu(A^{-1}), \quad A \in \mathcal{B}(G), \quad (2.45)$$

es una medida de Haar derecha en G .

En particular, si el grupo es compacto, sus medidas de Haar izquierda y derecha coinciden. En este caso, se dice que G es *unimodular*.

Corolario 2.4.10. El grupo unitario de grado n es un grupo topológico unimodular.

2.5. Cuaterniones. Grupo simpléctico

El matemático británico Freeman Dyson consideró matrices aleatorias con entradas reales, complejas o cuaterniónicas. Estas tres opciones, llamadas “La triple vía de Dyson”, representan la clasificación general clásica de matrices aleatorias. Generalmente cada una de ellas se denota por $\beta = 1, 2, 4$ respectivamente. Posteriormente veremos que en el caso de las colectividades Gaussianas de matrices aleatorias, β denota el número de parámetros reales de las entradas no diagonales de las matrices de dichas colectividades. En los Capítulos 3 y 4 introduciremos modelos de matrices con entradas en el anillo de los cuaterniones. Por ello, abordaremos en esta sección un resumen acerca de este cuerpo no conmutativo, así como la introducción de la noción de grupo simpléctico.

2.5.1. Cuaterniones

Definición 2.5.1. Un *cuaternión* es una combinación lineal

$$q = q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k, \quad q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)} \in \mathbb{R} \quad (2.46)$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

El conjunto de los cuaterniones se define, en honor a W.R Hamilton quien los introdujo en 1843, como:

$$\mathbb{H} = \{q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k : q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)} \in \mathbb{R}\}. \quad (2.47)$$

De la Definición 2.5.1 se sigue que

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (2.48)$$

Sean $q = q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k$, $r = r^{(0)} + r^{(1)}i + r^{(2)}j + r^{(3)}k \in \mathbb{H}$ dos cuaterniones. La *suma* de q y r se define por

$$\begin{aligned} q + r &= (q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k) + (r^{(0)} + r^{(1)}i + r^{(2)}j + r^{(3)}k) \\ &\stackrel{def}{=} (q^{(0)} + r^{(0)}) + (q^{(1)} + r^{(1)})i + (q^{(2)} + r^{(2)})j + (q^{(3)} + r^{(3)})k \end{aligned} \quad (2.49)$$

Asimismo, el *producto* de q por r está dado por

$$\begin{aligned} q \cdot r &= (q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k) \cdot (r^{(0)} + r^{(1)}i + r^{(2)}j + r^{(3)}k) \\ &\stackrel{def}{=} (q^{(0)}r^{(0)} - q^{(1)}r^{(1)} - q^{(2)}r^{(2)} - q^{(3)}r^{(3)}) \\ &\quad + (q^{(0)}r^{(1)} + r^{(0)}q^{(1)} + q^{(2)}r^{(3)} - q^{(3)}r^{(2)})i \\ &\quad + (q^{(0)}r^{(2)} + r^{(0)}q^{(2)} + q^{(3)}r^{(1)} - q^{(1)}r^{(3)})j \\ &\quad + (q^{(0)}r^{(3)} + r^{(0)}q^{(3)} + q^{(1)}r^{(2)} - q^{(2)}r^{(1)})k. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Con las operaciones (2.49) y (2.50), se tiene que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

Observación 2.5.2. A diferencia de la multiplicación de los números reales o complejos, el producto de cuaterniones no es conmutativo. Basta observar que

$$ij = k \neq -k = ji. \quad (2.51)$$

Definición 2.5.3. Sea $q = q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k$. Se define:

- El *conjugado* de q como

$$\bar{q} = q^{(0)} - q^{(1)}i - q^{(2)}j - q^{(3)}k. \quad (2.52)$$

- La *norma* o *módulo* de q por

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{(q^{(0)})^2 + (q^{(1)})^2 + (q^{(2)})^2 + (q^{(3)})^2} \in \mathbb{R}^+. \quad (2.53)$$

Si $q \in \mathbb{H}$ es un cuaternión no nulo, el *inverso* de q es $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$. Por tanto, \mathbb{H} es anillo de división o cuerpo no conmutativo.

2.5.2. Representación matricial de los cuaterniones

Introducimos en lo que sigue una de las representaciones matriciales de los cuaterniones. Sea $q \in \mathbb{H}$, veamos que q admite una representación en términos de una matriz $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Consideremos el conjunto de las matrices complejas 2×2 de la forma,

$$\hat{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \quad (2.54)$$

Podemos definir un isomorfismo, $T: \mathbb{H} \longrightarrow \hat{\mathbb{H}}$, dado por:

$$\begin{aligned} a &\longmapsto a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ 1 &\longmapsto I_2 \\ i &\longmapsto e_1 \\ j &\longmapsto e_2 \\ k &\longmapsto e_3 \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

Notemos que $e_1^2, e_2^2, e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -I_2$. Así, si $q = q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k \in \mathbb{H}$, entonces

$$q \longmapsto A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \hat{\mathbb{H}}, \quad (2.57)$$

donde $z = q^{(0)} + q^{(1)}i$, $w = q^{(2)} + q^{(3)}i$. Además, $T(\bar{q}) = A^*$, siendo A^* la matriz traspuesta conjugada de A .

2.5.3. Matrices cuaterniónicas

Podemos generalizar lo expuesto anteriormente a una matriz cuaterniónica $n \times n$ arbitraria. Esto es, si $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{H})$, entonces \mathcal{Q} podrá escribirse en términos de una matriz $\mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{C})$. Definimos $T(\mathcal{Q})$ la matriz obtenida al reemplazar cada cuaternión q_{ij} por su representación matricial, es decir

$$T(\mathcal{Q}) = [T(q_{ij})]_{i,j=1}^n = Q_0 \otimes I_2 + Q_1 \otimes e_1 + Q_2 \otimes e_2 + Q_3 \otimes e_3 \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{C}). \quad (2.58)$$

donde $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y \otimes denota el producto de Kronecker.

Definición 2.5.4. Sea $Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{H})$. La *matriz dual* de Q , Q^R está definida por la expresión:

$$(Q^R)_{ij} = \bar{q}_{ji}. \quad (2.59)$$

Una matriz que verifica $Q^R = Q$ se llama *auto-dual*.

Definición 2.5.5. El *grupo simpléctico* (compacto) de orden n , $\text{Sp}(n)$ es el subgrupo de $GL(n, \mathbb{H})$, tal que

$$S^R = S^{-1}, \text{ para cada } S \in \text{Sp}(n). \quad (2.60)$$

Dada la analogía entre $\text{U}(n)$ y $\text{Sp}(n)$, este último se denomina en ocasiones *grupo hiperunitario* y se denota $\text{U}(n, \mathbb{H})$.

Capítulo 3

Colectividades Gaussianas de matrices aleatorias

En este capítulo, introducimos los modelos de matrices aleatorias más estudiados: las colectividades Gaussianas. Comenzaremos proporcionando la definición de las llamadas matrices de Wigner y enunciaremos un resultado elemental en teoría de matrices aleatorias acerca de la distribución de los valores propios de estas matrices. A continuación, presentaremos las colectividades Gaussianas, e incluiremos un análisis de la distribución de sus valores propios. En particular, nos centraremos en la obtención de la expresión explícita de la función de densidad conjunta de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Ortogonal y probaremos que los valores propios de la Colectividad Gaussiana Unitaria forman un proceso determinantal sobre \mathbb{R} .

3.1. Matrices de Wigner

Definición 3.1.1. Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ se dice *hermitiana* o *hermítica* si

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, 1 \leq i, j \leq n, \quad (3.1)$$

es decir, A coincide con su traspuesta conjugada A^* .

Proposición 3.1.2. *Los valores propios de una matriz hermitiana son reales.*

Demostración:

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana y sea $x \in \mathbb{C}^n$ un vector columna. Probemos en primer lugar que x^*Ax es un número real. En efecto,

$$\overline{x^*Ax} = \overline{x^T \bar{A}x} = x^T \bar{A}\bar{x} \quad (3.2)$$

Puesto que $x^T \bar{A}\bar{x}$ es una matriz de dimensión 1×1 , es simétrica, luego se tendrá que

$$\overline{x^*Ax} = x^T \bar{A}\bar{x} = (x^T \bar{A}\bar{x})^T = \bar{x}^T \bar{A}^T x = x^* A^* x = x^* Ax. \quad (3.3)$$

Es decir, x^*Ax coincide con su conjugado, y por consiguiente $x^*Ax \in \mathbb{R}$.

Sea λ un valor propio de A , que en un principio supondremos complejo. Entonces existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Si multiplicamos dicha ecuación a izquierda por x^* obtenemos $x^*Ax = \lambda x^*x$. Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$x^*x = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2, \quad (3.4)$$

concluimos que $\lambda = \frac{x^*Ax}{x^*x} \in \mathbb{R}$. □

Definición 3.1.3. Sean $\{z_{ij}\}_{1 \leq i < j}$, $\{y_i\}_{1 \leq i}$ dos familias independientes de variables aleatorias reales o complejas i.i.d., de media cero tal que $\mathbb{E}[Z_{12}^2] = 1$, y para cada entero positivo $k \geq 1$,

$$r_k := \max(\mathbb{E}[|Z_{12}|^k], \mathbb{E}[|Y_1|^k]) < \infty. \quad (3.5)$$

Sea $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matriz (simétrica o hermitiana) $n \times n$ con entradas:

$$x_{ji} = \bar{x}_{ij} = \begin{cases} z_{ij} & \text{si } i < j \\ y_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.6)$$

X se llama *matriz de Wigner*. Además, si z_{ij} e y_i son variables aleatorias normales, diremos que X es una *matriz de Wigner Gaussiana*.

Definición 3.1.4. Sea X una matriz de Wigner $n \times n$. Sean $\lambda_1(X), \dots, \lambda_n(X)$, los valores propios (reales) de X con $\lambda_1(X) \leq \dots \leq \lambda_n(X)$. Se llama *distribución empírica* de los valores propios a la medida de probabilidad en \mathbb{R} definida por

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}(X), \quad (3.7)$$

esto es, para cada $A \in \mathcal{B}$

$$\mu_X(A) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq i \leq n : \lambda_i(X) \in A\}. \quad (3.8)$$

Definición 3.1.5. Se define la *distribución del semicírculo de Wigner* como la distribución de probabilidad en \mathbb{R} con función de densidad con respecto a dx dada por

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} I_{|x| \leq 2}. \quad (3.9)$$

El siguiente teorema, cuya demostración no incluiremos aquí dada su extensión, pero puede consultarse en [1], es considerado uno de los puntos de partida de la teoría de matrices aleatorias.

Teorema 3.1.6. Sea $X_n = n^{-1/2}Y$, con Y una matriz de Wigner $n \times n$. Entonces la distribución empírica μ_{X_n} converge débilmente, en probabilidad, a la distribución del semicírculo.

Más concretamente, el Teorema 3.1.6 afirma que para cada $\epsilon > 0$ y $f \in C_b(\mathbb{R})$, donde $C_b(\mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones continuas y acotadas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \int f d\mu_{X_n} - \int f d\sigma \right| > \epsilon \right) = 0. \quad (3.10)$$

Corroboremos numéricamente el resultado anterior con el siguiente ejemplo. Consideremos una matriz de Wigner Gaussiana de dimensión $n = 5000$, $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, tal que si $i = j$, $\{x_{ii} : 1 \leq i \leq n\}$ son variables aleatorias i.i.d con distribución $N(0, 2)$, y si $i \neq j$, $\{x_{ij} = \bar{x}_{ji} : 1 \leq i < j \leq n\}$ es una familia de variables aleatorias i.i.d con distribución normal estándar, independiente de la familia anterior. En la Sección 3.2 estudiaremos un modelo de matrices cuya distribución sobre el espacio de matrices simétricas coincide con la distribución de la matriz aleatoria X .

En la Figura 3.1 representamos, por medio de un histograma, la función de densidad empírica de los valores propios de una realización de X . Apreciamos como claramente el histograma de los valores propios parece converger a la gráfica de la función de densidad de la distribución del semicírculo, representada en rojo.

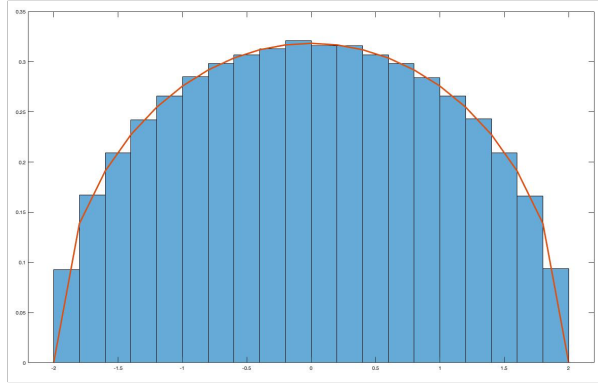


Figura 3.1: Histograma de la función de densidad empírica de los valores propios de una realización de una matriz de Wigner Gaussiana 5000×5000 . En rojo, la gráfica de la función de densidad de la distribución del semicírculo. Realizado con Matlab.

3.2. GOE, GUE y GSE

Las colectividades Gaussianas, también denominadas colectividades clásicas de matrices aleatorias (GOE, GUE y GSE) han desempeñado un papel importante en el desarrollo y aplicaciones de la teoría de matrices aleatorias.

Definición 3.2.1. Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz aleatoria simétrica tal que $\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ son variables aleatorias independientes con

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} &\sim N(0, 1), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \\ a_{ii} &\sim N(0, 2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Entonces el espacio de matrices simétricas $n \times n$ junto con la distribución de la matriz aleatoria A se denomina *Colectividad Gaussiana Ortogonal* (GOE). Diremos que A pertenece o es una matriz de la Colectividad Gaussiana Ortogonal.

Nótese que si consideramos una matriz $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donde x_{ij} son variables aleatorias i.i.d. con distribución $N(0, 1)$ y construimos la matriz

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + X^T), \quad (3.12)$$

entonces la distribución de la matriz aleatoria A coincide con la distribución de la GOE.

Definición 3.2.2. Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz aleatoria hermitiana tal que $\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ son variables aleatorias independientes con

$$\begin{aligned} a_{ij} = \bar{a}_{ji} &\sim N(0, \frac{1}{2}) + iN(0, \frac{1}{2}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \\ a_{ii} &\sim N(0, 1), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Se denomina *Colectividad Gaussiana Unitaria* (GUE), al espacio de matrices hermitianas $n \times n$ dotado con la distribución de A . Diremos que la matriz aleatoria A es una matriz de la GUE.

De manera similar a lo expuesto para la Colectividad Gaussiana Ortogonal, si consideramos una matriz $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, donde x_{ij} son variables aleatorias complejas i.i.d. con distribución $N(0, \frac{1}{2}) + iN(0, \frac{1}{2})$ y posteriormente definimos

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + X^*), \quad (3.13)$$

entonces A pertenece al GUE.

Definición 3.2.3. Sean $q^{(k)} \in \mathbb{R}$ $0 \leq k \leq 3$, variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución $N(0, 1/4)$. El cuaternión aleatorio

$$q = (q^{(0)} + q^{(1)}i + q^{(2)}j + q^{(3)}k). \quad (3.14)$$

se llama *cuaternión normal (estándar)*.

Sea $a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}i + a_{ij}^{(2)}j + a_{ij}^{(3)}k \in \mathbb{H}$.

Definición 3.2.4. Consideremos una matriz aleatoria cuaterniónica auto-dual $A = (a_{ij})$ con a_{ij} variables independientes, tales que si $i < j$, a_{ij} son cuaterniones normales (estándar), $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ y en la diagonal $i = j$, tenemos

$$a_{ii} = a_{ii}^{(0)} \sim N(0, \frac{1}{2}), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.15)$$

El espacio de matrices cuaterniónicas auto-duales $n \times n$ con la distribución de la matriz aleatoria A se denomina *Colectividad Gaussiana Simplética* (GSE).

Sea $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ una matriz $2n \times 2n$ donde $x_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)}i + x_{ij}^{(2)}j + x_{ij}^{(3)}k$ son cuaterniones normales estándar con $x_{ij}^k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq 3$. Entonces la distribución de la matriz aleatoria

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + X^R), \quad (3.16)$$

es la distribución de la GSE.

La razón por la cual se exige la variación en la distribución de los elementos de la diagonal de las matrices que determinan las distribuciones de la GOE, GUE y GSE es porque podemos expresar éstas de un modo especialmente útil.

Proposición 3.2.5. *La distribución de las colectividades Gaussianas GOE/GUE/GSE tiene función de densidad con respecto a la medida de Lebesgue en el espacio de matrices simétricas, hermitianas o autoduales a*

$$\frac{1}{Z_{n,\beta}} e^{-\frac{\beta}{4} \text{tr} A^2} dA, \quad (3.17)$$

donde $\beta = 1$ corresponde al caso ortogonal, $\beta = 2$ al unitario y $\beta = 4$ si la colectividad es simplética. $\frac{1}{Z_{n,\beta}}$ es una constante de normalización apropiada y

$$\begin{aligned} dA &= \prod_i da_{ii} \prod_{i < j} da_{ij} \\ dA &= \prod_i da_{ii} \prod_{i < j} d\text{Re} a_{ij} d\text{Im} a_{ij} \\ dA &= \prod_i da_{ii}^{(0)} \prod_{i < j} \prod_{\alpha=0}^3 da_{ij}^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Demostración:

Consideremos el caso $\beta = 1$, siendo los otros dos similares. Recordemos que la distribución de la GOE venía dada por la distribución de una matriz aleatoria $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ simétrica cuyos elementos son variables independientes con distribución $N(0, 2)$ en la diagonal y con distribución $N(0, 1)$ fuera de ésta. Por definición, los elementos A_{ij} son independientes, luego la función de

densidad de A vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}a_{ii}^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a_{ij}^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n-1)}{4}} e^{-\frac{1}{4}[\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} e^{-\frac{1}{4}[\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} e^{-\frac{1}{4}[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} e^{-\frac{1}{4} \text{Tr}(A^2)}, \quad A = (a_{ij}) \in G_n.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

En el primer paso simplemente separamos la constante del producto y transformamos el producto en suma de exponenciales. En el segundo, usamos que $a_{ij} = a_{ji}$, luego $\sum_{i < j} a_{ij}^2 = \sum_{i > j} a_{ij}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$. Por último se combinan las dos sumas e interpretamos $\sum_{i,j} a_{ij}^2$ como $\text{Tr} A^2$. Notemos que en el caso $\beta = 1$, la constante de normalización es

$$\frac{1}{Z_{n,1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}}. \tag{3.20}$$

□

Más concretamente, lo que el resultado anterior significa en el caso particular $\beta = 1$, es que si g es una función definida en el espacio de las matrices simétricas $n \times n$ continua y acotada y X es una matriz de la GOE, entonces

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{4}} \int_{G_n} g(A) e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} A^2} dA. \tag{3.21}$$

Una de las propiedades más importantes de las distribuciones de estos modelos de matrices es que son invariantes por la acción del grupo ortogonal, unitario o simpléctico, si $\beta = 1, 2$ ó 4 respectivamente. Este es de hecho el origen de los términos ortogonal, unitario y simpléctico en el nombre de las colectividades Gaussianas. Denotemos $\mathbb{P}_{n,\beta}$ la distribución de la GOE, GUE y GSE, esto es, la probabilidad cuya función de densidad con respecto a dA viene dada por la expresión (3.17).

Proposición 3.2.6. *Sea $B_{n,\beta}$ un elemento de la σ -álgebra de Borel sobre el espacio de matrices simétricas si $\beta = 1$, hermitianas si $\beta = 2$ o auto-duales si $\beta = 4$, de dimensión $n \times n$. Entonces*

$$\mathbb{P}_{n,\beta}(B_{n,\beta}) = \mathbb{P}_{n,\beta}(U^{-1} B_{n,\beta} U), \tag{3.22}$$

para cada matriz $U \in \text{O}(n)$, $\text{U}(n)$ ó $\text{Sp}(n)$ respectivamente.

Demostración:

Consideremos el caso ortogonal. Para $\beta = 2$ ó $\beta = 4$ la prueba es similar. Veamos que para cada $B_{n,1} \in \mathcal{B}(G_n)$ y matriz ortogonal $U \in \text{O}(n)$, se tiene que $\mathbb{P}_{n,1}(B_{n,1}) = \mathbb{P}_{n,1}(U^T B_{n,1} U)$. Consideremos el automorfismo ϕ_U de G_n definido por

$$\phi_U: \begin{array}{ccc} G_n & \longrightarrow & G_n \\ A & \longmapsto & U A U^T \end{array} \tag{3.23}$$

La aplicación ϕ es biyectiva, luego será un cambio de variables válido en nuestra integral. Teniendo en cuenta que $\text{Tr}(AU) = \text{Tr}(UA)$ y $U^T U = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, tenemos que $\text{Tr}(UAU^T)^2 = \text{Tr}(UA^2 U^T) = \text{Tr}(A^2)$. Por consiguiente, será suficiente con comprobar que el valor absoluto del jacobiano de ϕ_U es uno. Calculamos las coordenadas explícitas de la matriz UAU^T ,

$$(UAU^T)_{ij} = \sum_{k,l=1}^n u_{ik} a_{kl} u_{jl} = \sum_{k,l=1}^n u_{ik} u_{jl} a_{kl}. \quad (3.24)$$

La matriz jacobiana de dicha transformación, que denotamos J_{ϕ_U} , será la matriz en cuyas columnas están las derivadas de $(UAU^T)_{ij}$ respecto de las variables a_{kl} . Más concretamente,

$$J_{\phi_U(k,l),(i,j)} = \frac{d}{da_{kl}} (UAU^T)_{ij} = u_{ik} u_{jl}. \quad (3.25)$$

Notemos que $\det J_{\phi_U}$ realmente sólo depende de U . Veamos que en efecto, $|\det J_{\phi_U}| = 1$. Por la regla de la derivada de un producto, sabemos que la matriz jacobiana de dos cambios de variables, será el producto de las matrices jacobianas de cada uno de ellos. Es decir, si $O \in O(n)$ es otra matriz ortogonal, entonces $J_{\phi_{UO}} = J_{\phi_U} J_{\phi_O}$ y por consiguiente, $\det J_{\phi_{UO}} = \det J_{\phi_U} \det J_{\phi_O}$. Lo siguiente que tendremos en cuenta es que

$$[J_{\phi_U}^T]_{(k,l),(i,j)} = J_{\phi_U(i,j),(k,l)} = u_{ki} u_{lj} = (U^T)_{ik} (U^T)_{jl} = J_{\phi_{U^T}(k,l),(i,j)}, \quad (3.26)$$

luego $J_{\phi_U}^T = J_{\phi_{U^T}}$, de donde deducimos que $\det J_{\phi_{U^T}} = \det J_{\phi_U}$. Así, se tendrá que

$$[\det J_{\phi_U}]^2 = \det J_{\phi_U} \det J_{U^T} = \det J_{UU^T} = \det J_{I_n} = 1. \quad (3.27)$$

Concluimos que $|\det J_{\phi_U}| = 1$. Así, si $Y = UAU^T$, para cada $B_{n,1} \in \mathcal{B}(G_n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n,1}(B_{n,1}) &= \int_{B_{n,1}} \frac{1}{Z_{n,1}} e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} Y^2} dY \\ &= \int_{U^T B_{n,1} U} \frac{1}{Z_{n,1}} e^{-\frac{1}{4} \text{Tr}(UAU^T)^2} |\det J_{\phi_U}| dA \\ &= \int_{U^T B_{n,1} U} \frac{1}{Z_{n,1}} e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} A^2} dA \\ &= \mathbb{P}_{n,1}(U^T B_{n,1} U). \end{aligned} \quad (3.28)$$

□

En otras palabras, la Proposición 3.2.6 afirma que si X es una matriz de la GOE, GUE ó GSE y U es una matriz ortogonal, unitaria o simpléctica, entonces las matrices aleatorias UXU^{-1} y X tienen la misma distribución. El resultado siguiente muestra que si $\beta = 1$, el recíproco también es cierto. Es decir, que dada una matriz aleatoria simétrica arbitraria cuya distribución es invariante por la acción del grupo ortogonal, entonces la distribución de dicha matriz es la distribución de la GOE. La demostración del Teorema 3.2.7 se toma de [21] y utilizamos la notación introducida en la Sección 2.2.1.

Teorema 3.2.7. *Sea $X = (X_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ una matriz aleatoria simétrica $n \times n$ cuya distribución es invariante por el producto a izquierda y a derecha por una matriz ortogonal y su traspuesta respectivamente. Supongamos que las variables aleatorias $\{X_{jk}\}_{1 \leq j,k \leq n}$ son independientes y con varianza finita. Entonces existe una matriz aleatoria Y de la GOE, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ tal que las matrices X y $\mu I_{n \times n} + \sigma^2 Y$ tienen la misma distribución.*

Demostración:

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y $1 \leq k, j \leq n$, denotamos $A_{(k,j)}^t$ la matriz simétrica que tiene todos los elementos nulos, excepto la coordenada (k, j) (y por tanto también la coordenada (j, k)) que toma el valor t . Calculando la función característica de X en $A_{(k,j)}^t$:

$$\begin{aligned}\Phi_X(A_{(k,j)}^t) &= \mathbb{E}[\exp \{i \text{Tr}(X^T A_{(k,j)}^t)\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp \{2itX_{kj}\}] \\ &= \varphi_{X_{kj}}(2t).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Si $k \neq j$ y $l \neq g$, existe una matriz permutación $P \in O(n)$ (en la prueba de la Proposición 4.1.2 mostramos como se definen explícitamente estas matrices) tal que $P^T A_{(k,j)}^t P = A_{(l,g)}^t$. Entonces, por la propiedad de la invarianza de la distribución de X , se tiene

$$\varphi_{X_{kj}}(2t) = \Phi_X(A_{(k,j)}^t) = \Phi_X(P^T A_{(k,j)}^t P) = \Phi_X(A_{(l,g)}^t) = \varphi_{X_{lg}}(2t)\tag{3.30}$$

Luego las variables X_{kj} y X_{lg} tienen la misma distribución. Esto es, los elementos de fuera de la diagonal de X , están igualmente distribuidos.

Ahora, para cada $1 \leq j \leq n$, denotamos A_j^t la matriz que tiene como única coordenada no nula, la que está en la posición (j, j) que toma el valor $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_X(A_j^t) &= \mathbb{E}[\exp i \{ \text{Tr}(X^T A_j^t) \}] \\ &= \mathbb{E}[\exp \{itX_{jj}\}] \\ &= \varphi_{X_{jj}}(t),\end{aligned}\tag{3.31}$$

Como antes, si $j \neq k$, existe una matriz permutación $Q \in O(n)$ tal que $Q^T A_j^t Q = A_k^t$, luego

$$\varphi_{X_{jj}}(t) = \Phi_X(A_j^t) = \Phi_X(Q^T A_j^t Q) = \Phi_X(A_k^t) = \varphi_{X_{kk}}(t), \quad t \in \mathbb{R},\tag{3.32}$$

de donde deducimos que todos los elementos de la diagonal principal de X tienen la misma distribución.

Por consiguiente, para determinar la distribución de X , bastará con obtener la distribución de la submatriz

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}\tag{3.33}$$

Veamos que la distribución de la matriz \tilde{X} es invariante por rotaciones en \mathbb{R}^2 . En efecto, sea $\theta \in \mathbb{R}$. Consideremos la matriz dada por

$$Q'_\theta = \begin{pmatrix} Q_\theta & 0 \\ 0 & I_{(n-2) \times (n-2)} \end{pmatrix},\tag{3.34}$$

donde

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\tag{3.35}$$

Sea $M \in G_2$ una matriz simétrica 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\tag{3.36}$$

y sea $M' \in G_n$ la matriz simétrica $n \times n$ obtenida añadiendo ceros en M

$$M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

Entonces

$$\Phi_X(M') = \mathbb{E}[\exp\{i(aX_{11} + 2bX_{12} + cX_{22})\}] = \Phi_{\tilde{X}}(M). \quad (3.38)$$

Ahora bien, por la propiedad de la invarianza de la distribución de X y teniendo en cuenta que todos los elementos de la matriz M' son nulos excepto los de la submatriz M 2×2 ,

$$\Phi_{\tilde{X}}(M) = \Phi_X(M') = \Phi_X((Q'_\theta)^T M' Q'_\theta) = \Phi_{\tilde{X}}((Q_\theta)^T M Q_\theta). \quad (3.39)$$

Definimos

$$M_\theta = Q_\theta^T M Q_\theta = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

Calculamos explícitamente los valores de A , B y D :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \cos(2\theta) - b \sin(2\theta), \\ B &= \frac{a-c}{2} \sin(2\theta) + b \cos(2\theta), \\ C &= \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} \cos(2\theta) + b \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (3.41)$$

y obtenemos las derivadas de las expresiones anteriores con respecto a θ :

$$\frac{dA}{d\theta} = -2B, \quad \frac{dB}{d\theta} = A - C, \quad \frac{dC}{d\theta} = 2B. \quad (3.42)$$

Hemos visto que la distribución de \tilde{X} es invariante por rotaciones, luego

$$\Phi_{\tilde{X}}(M_\theta) = \Phi_{\tilde{X}}(M). \quad (3.43)$$

Como las entradas de X son independientes, y las variables X_{11} y X_{22} tienen la misma distribución

$$\varphi_{X_{11}}(a)\varphi_{X_{12}}(2b)\varphi_{X_{11}}(c) = \varphi_{X_{11}}(A)\varphi_{X_{12}}(2B)\varphi_{X_{11}}(C). \quad (3.44)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a θ (notemos que las entradas de \tilde{X} tienen varianza finita, luego existen las derivadas de orden dos de $\varphi_{X_{11}}$ y de $\varphi_{X_{12}}$):

$$0 = \varphi'_{X_{11}}(A)\varphi_{X_{12}}(2B)\varphi_{X_{11}}(C)\frac{dA}{d\theta} + \varphi_{X_{11}}(A)\varphi'_{X_{12}}(2B)\varphi_{X_{11}}(C)2\frac{dB}{d\theta} + \varphi_{X_{11}}(A)\varphi_{X_{12}}(2B)\varphi'_{X_{11}}(C)\frac{dC}{d\theta}.$$

Como $\varphi_{X_{11}}(0) = \varphi_{X_{12}}(0) = 1$ y ambas son funciones continuas en cero, existe un entorno de cero en el que estas funciones son no nulas. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación anterior como sigue

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\varphi'_{X_{11}}(A)}{\varphi_{X_{11}}(A)}\varphi_{X_{11}}(A)\varphi_{X_{12}}(2B)\varphi_{X_{11}}(C)\frac{dA}{d\theta} + \varphi_{X_{11}}(A)\frac{\varphi'_{X_{12}}(2B)}{\varphi_{X_{12}}(2B)}\varphi_{X_{12}}(2B)\varphi_{X_{11}}(C)2\frac{dB}{d\theta} \\ &+ \varphi_{X_{11}}(A)\varphi_{X_{12}}(2B)\frac{\varphi'_{X_{11}}(C)}{\varphi_{X_{11}}(C)}\varphi_{X_{11}}(C)\frac{dC}{d\theta}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (3.42) y dividiendo entre $-B(A - D)$ (si $B \neq 0$, $A \neq B$), finalmente la ecuación queda

$$\frac{1}{B} \frac{\varphi'_{X_{12}}(2B)}{\varphi_{X_{12}}(2B)} = \frac{1}{A - D} \left[\frac{\varphi'_{X_{11}}(A)}{\varphi_{X_{11}}(A)} - \frac{\varphi'_{X_{11}}(C)}{\varphi_{X_{11}}(C)} \right]. \quad (3.46)$$

La parte izquierda de la ecuación (3.46) depende solo de B , mientras que la parte derecha depende de A y de C , por lo tanto (3.46) ha de ser constante. Es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{B} \frac{\varphi'_{X_{12}}(2B)}{\varphi_{X_{12}}(2B)} = -k \quad (3.47)$$

Tomando $x = 2B$ y resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene $\varphi_{X_{12}}(x) = C_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$, $C_0 \in \mathbb{R}$. De nuevo, como $\varphi_{X_{12}}(0) = 1$, $C_0 = 1$. Notemos que estamos suponiendo que la igualdad es válida en un entorno de cero. Podemos, no obstante, extender dicha solución a todo \mathbb{R} . En efecto, si $k < 0$, entonces $|\varphi_{X_{12}}(x)| \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción con el hecho de que las funciones características son funciones acotadas. Por lo tanto, $k > 0$ y $\varphi_{X_{12}}$ es la función característica de una variable aleatoria normal $N(0, k/2)$. Si $k = 0$, $\varphi_{X_{12}}$ es la función característica de la distribución idénticamente nula.

Ahora, haciendo $C = 0$, en la ecuación (3.46), obtenemos que

$$\frac{1}{A - D} \left[\frac{\varphi'_{X_{11}}(A)}{\varphi_{X_{11}}(A)} - \frac{\varphi'_{X_{11}}(0)}{\varphi_{X_{11}}(0)} \right] \quad (3.48)$$

Sabemos que $\varphi_{X_{11}}(0) = 1$ y de la definición se sigue directamente también que $\varphi'_{X_{11}}(0) = i\mathbb{E}[X_{11}]$. Reemplazando estos valores en (3.48) y resolviendo la ecuación diferencial resultante, obtenemos

$$\varphi_{X_{11}}(x) = e^{i\mu x - \frac{kx^2}{2}}, \quad (3.49)$$

donde $\mu = \mathbb{E}[X_{11}]$. En otras palabras, $\varphi_{X_{11}}$ es la función característica de una variable aleatoria normal $N(\mu, k)$. Como k es una constante positiva, si escribimos $k = 2\sigma^2$, tenemos que $\varphi_{X_{11}}$ y $\varphi_{X_{12}}$ son las funciones características de una variable aleatoria con distribución $N(\mu, 2\sigma^2)$ y $N(0, \sigma^2)$ respectivamente. En consecuencia, para cada $1 \leq j, k \leq n$, si $j = k$ la distribución de X_{jk} es una normal $N(\mu, \sigma^2)$, mientras que si $j \neq k$, X_{jk} tiene una distribución normal $N(0, \sigma^2)$. Si $Y = (Y_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ es una matriz de la GOE, por definición $Y_{jj} \sim N(0, 2)$ e $Y_{jk} \sim N(0, 1)$ si $j \neq k$. Concluimos que las matrices X y $\mu I_{n \times n} + \sigma^2 Y$ tienen la misma distribución. □

3.3. Valores propios de las colectividades Gaussianas

El objetivo principal de esta sección es mostrar una demostración del teorema que proporciona una fórmula explícita de la distribución de los valores propios de las colectividades Gaussianas. Dada la extensión de la prueba, habrá determinados pasos que no expondremos con excesivo detalle y nos referiremos a [1]. Finalizamos este apartado, centrándonos en la Colectividad Gaussiana Unitaria, con unos breves comentarios acerca de las funciones de correlación de sus valores propios y la relación de este modelo de matrices aleatorias con los polinomios de Hermite.

Sea A una matriz simétrica, hermitiana o auto-dual. Denotemos $\lambda_1^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)} := \lambda_{\max}$ los valores propios de A . Estos valores propios son reales y definen variables aleatorias en los respectivos espacios probabilísticos.

Teorema 3.3.1. *La función de densidad de la distribución conjunta de los valores propios de las colectividades Gaussianas GOE, GUE y GSE con respecto a $d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$, viene dada por*

$$C_{n,\beta} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{j=1}^n e^{-\beta \frac{1}{4} \lambda_j^2}. \quad (3.50)$$

donde $\beta = 1$ si la colectividad es ortogonal, $\beta = 2$ si la colectividad es unitaria y $\beta = 4$ si la colectividad es simpléctica. La constante $C_{n,\beta}$ es una constante de normalización y viene dada por

$$C_{n,\beta} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{j=1}^n e^{-\beta \lambda_j^2/4} d\lambda_j \right)^{-1} \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{n!} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{\beta n(n-1)/4 + n/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\beta/2)}{\Gamma(j\beta/2)}$$

donde, para cada número real positivo s ,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \quad (3.52)$$

es la función gamma.

Observación 3.3.2. El término $\prod_{j=1}^n e^{-\beta \frac{1}{4} \lambda_j^2}$ de la fórmula dada en el Teorema 3.3.1, indica que son muy improbables configuraciones de valores propios $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \leq n}$, donde algún λ_j es “grande” en valor absoluto. Por su parte, el factor $\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$, muestra que éstos son fuertemente dependientes. Por lo tanto, las herramientas utilizadas para variables aleatorias independientes son de poca utilidad en el estudio de los valores propios de las colectividades Gaussianas.

Observación 3.3.3. Otra de las consecuencias del Teorema 3.3.1, es que la probabilidad de que existan dos valores propios iguales es cero (en tanto que si $\lambda_i = \lambda_j$ para $i \neq j$, entonces el término $\prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$ se anula). Esto significa que cada subespacio propio tiene dimensión uno. Consideremos v_1, \dots, v_n una base de vectores propios de una matriz X de las colectividades Gaussianas, la cual se normaliza de modo que la primera coordenada de cada v_i sea real, positiva y $\|v_i\|_2 = 1$. La invarianza de la distribución de X bajo transformaciones ortogonales, unitarias o simplécticas cuando $\beta = 1, 2$ ó 4 respectivamente, implica que la matriz en cuyas columnas están los vectores propios, i.e la matriz de la forma $[v_1, \dots, v_n]$ está distribuida con la medida de Haar normalizada en $O(n)$, $U(n)$ o $Sp(n)$. En particular, cada uno de los vectores v_i , se distribuye uniformemente en el conjunto de vectores de norma uno cuya primera coordenada es real y positiva. Más concretamente, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3.4. *Sea*

$$S_{\mathbb{R},+}^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{K}, i \geq 2, \|x\|_2 = 1, x_1 > 0\}. \quad (3.53)$$

Entonces, con la notación introducida en la Observación 3.3.3, la matriz $[v_1, \dots, v_n]$ se distribuye con la medida de Haar normalizada en el grupo de matrices ortogonales, unitarias o simplécticas, con cada columna multiplicada por un escalar, de modo que cada vector v_i se distribuye uniformemente $S_{\mathbb{R},+}^{n-1}$ ($\beta = 1$), $S_{\mathbb{C},+}^{n-1}$ ($\beta = 2$) o a $S_{\mathbb{H},+}^{n-1}$ ($\beta = 4$).

Demostración:

Consideremos el caso $\beta = 1$. De nuevo, los otros dos casos son similares. Sea X una matriz de la GOE. Consideremos una descomposición de X de la forma $X = ODO^T$, donde D es la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de la matriz X y O es la matriz en cuyas columnas están los vectores propios asociados a dichos valores propios (notemos que X es simétrica, luego esta factorización de X existe). Sea M una matriz ortogonal distribuida con la medida de Haar en $O(n)$ y consideremos la matriz MXM^T . Por la Proposición 3.2.6, tenemos que MXM^T

y X tienen la misma distribución. Además, por la definición de la medida de Haar normalizada en $O(n)$, sabemos que MO y M tienen la misma distribución. Luego tendremos que X y MDM^T tienen la misma distribución, es decir, la matriz que diagonaliza X está distribuida con la medida de Haar. Las columnas de esta matriz forman una base de vectores propios, y podemos multiplicar cada uno de ellos por una constante, que hace su primera coordenada real y no negativa. \square

3.3.1. Demostración del Teorema 3.3.1

A continuación proporcionamos una prueba del Teorema 3.3.1 (en gran parte tomada de [1]). Consideramos de nuevo el caso ortogonal (es posible encontrar una demostración para $\beta = 2$ o $\beta = 4$ en [18]). No incluiremos la obtención de la constante de normalización que aparece en la fórmula de este resultado aunque se puede calcular explícitamente haciendo uso de las llamadas integrales de Selberg. Queremos ver que dada una función medible $g: G_n \rightarrow [0, \infty]$ tal que para cada matriz simétrica A , $g(A)$ depende únicamente de los valores propios de A y X una matriz de la Colectividad Gaussiana Ortogonal, se tiene que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{1}{Z_{n,1}} \int_{G_n} g(A) e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} A^2} dA = C_{n,1} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{4} \lambda_j^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| d\lambda_j. \quad (3.54)$$

donde $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denota el valor de g en la matriz diagonal con entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Notemos que $e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} A^2} = e^{-\frac{1}{4} \sum_j \lambda_j^2}$, por lo que bastará ver que dA puede escribirse de forma que aparezca dicho producto sobre los valores propios. Para ello, escribiremos una matriz simétrica $X \in G_n$, en términos de sus valores propios y otros parámetros. Realizaremos el correspondiente cambio de variables en la integral, y el producto de las distancias entre valores propios distintos se obtendrá del cálculo del jacobiano. No obstante, aparecerán ciertos inconvenientes, puesto que dicho cambio de variables no es válido en todo el espacio de matrices simétricas, pero resulta que en el subconjunto en el que no lo es, tiene medida cero.

El cambio de variables que queremos realizar es el que proviene de diagonalizar X . El problema es que al cambiar las variables de integración de X a (D, O) , donde O es ortogonal, D es diagonal y $X = ODO^T$, esta aplicación no es una biyección y además podría no ser diferenciable en todo el espacio de matrices simétricas por lo que el jacobiano no estaría definido. Es por ello, por lo que se restringe a un subconjunto en el que el cambio de variables sea único y diferenciable.

Denotemos $O(n)^g$ al subconjunto de $O(n)$ de las matrices ortogonales cuyos elementos son distintos de 0 y tal que las coordenadas de la diagonal son reales y estrictamente positivas. Notemos que dicha notación proviene de que las matrices en estas condiciones se denominan matrices “buenas”, *good* en inglés. Asimismo, denotemos \mathcal{D}_n^d al subconjunto del espacio de matrices diagonales con coordenadas reales \mathcal{D}_n , cuyos elementos son distintos y \mathcal{D}_n^{do} el subconjunto de \mathcal{D}_n^d con entradas decrecientes, i.e

$$\mathcal{D}_n^{do} := \{D \in \mathcal{D}_n^d : D_{ii} > D_{i+1,i+1}\}. \quad (3.55)$$

Sea G_n^{dg} el subconjunto de G_n formado por aquellas matrices que admiten una descomposición $X = ODO^T$ donde $O \in O(n)^g$ y $D \in \mathcal{D}_n^{do}$. Dividiremos la prueba en tres resultados. El primer paso está contenido en el siguiente lema.

Lema 3.3.5. *El subconjunto $G_n \setminus G_n^{dg}$ tiene medida de Lebesgue nula. Además, la aplicación,*

$$\begin{aligned} \Phi: \quad (\mathcal{D}_n^{do}, O(n)) &\longrightarrow G_n^{dg} \\ (D, O) &\longmapsto ODO^T \end{aligned} \quad (3.56)$$

es biyectiva.

Demostración:

En primer lugar, notemos que dada cualquier función polinomial no nula p , el conjunto $\{X : p(X) = 0\}$ es cerrado y tiene medida de Lebesgue cero. Por lo que bastará encontrar una función polinomial no nula p tal que si $X \in G_n \setminus G_n^{dg}$, $p(X) = 0$.

Sea H una matriz $n \times n$. Para cada $i, j = 1, \dots, n$, sea $H^{(i,j)}$ la matriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de H . Denotamos $H^{(k)}$ a $H^{(k,k)}$. Comencemos probando que si $X = ODO^T$ con $D \in \mathcal{D}_n^{do}$ y X y $X^{(k)}$ no tienen valores propios en común para cada $k = 1, \dots, n$, entonces todos los elementos de O son no nulos. Sea λ un valor propio de X y sea $A = X - \lambda I_n$. Utilizando la identidad $A \text{Adj}(A) = \det(A)I_n$, tenemos que $A \text{Adj}(A) = 0$. Como estamos suponiendo que los valores propios de A son distintos, el núcleo de A tiene dimensión uno, luego todas las columnas de $\text{Adj}(A)$ son múltiplos de un vector v_λ , que será un vector propio asociado a λ . Además, como X y $X^{(k)}$ no tienen valores propios comunes, $v_\lambda(i) = \text{Adj}(A)_{i,i} = \det(X^{(i)} - \lambda I_n) \neq 0$, luego todas las coordenadas de v_λ son distintas de 0 para cada valor propio λ de X y por consiguiente todos los elementos de O también lo son.

La resultante del polinomio característico de X y de $X^{(k)}$ puede escribirse como un polinomio con coeficientes enteros en los elementos de X y $X^{(k)}$ y por lo tanto, como un polinomio p_1 en los elementos de X , y es 0 si y sólo si X y $X^{(k)}$ tienen algún valor propio común. Por otro lado, el discriminante de X es un polinomio p_2 en los elementos de X que es cero si y sólo si no todos los valores propios de X son distintos. Si tomamos el polinomio $p = p_1 p_2$, tenemos que $p \neq 0$ y $p(X)=0$ si $X \in G_n \setminus G_n^{dg}$ y se completa la prueba de la primera parte del lema.

Por último, es claro que Φ es biyectiva, en tanto que fijamos una representación única de cada matriz $X \in G_n^{dg}$ imponiendo por una parte, que las coordenadas de D sean estrictamente decrecientes, (lo cual implica también que cada subespacio propio tiene dimensión uno) y por otra, la condición de que las entradas diagonales de O sean estrictamente positivas, que fija los vectores propios. \square

Denotamos $O(n)^{v,g}$ al subconjunto de $O(n)^g$ formado por aquellas matrices cuyos menores son distintos de 0. Como antes, dicha notación proviene de que estas matrices son denominadas “muy buenas”, *very good* en inglés. El interés en tales matrices reside en que poseen una parametrización particular:

Lema 3.3.6. *La aplicación*

$$\begin{aligned} T: \quad O(n)^{v,g} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \\ O = (O_{i,j}) &\longmapsto \left(\frac{O_{1,2}}{O_{1,1}}, \dots, \frac{O_{1,n}}{O_{1,1}}, \frac{O_{2,3}}{O_{2,2}}, \dots, \frac{O_{2,n}}{O_{2,2}}, \dots, \frac{O_{n-1,n}}{O_{n-1,n-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

es inyectiva con inversa diferenciable. Además, el conjunto $T(O(n)^{v,g})^c$ es cerrado y tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración:

Comencemos con la primera parte del resultado. La prueba es una construcción inductiva. Denotemos v_1 la primera fila de O , i.e

$$v_1 = (O_{1,1}, O_{1,2}, \dots, O_{1,n}) = O_{1,1} \left(1, \frac{O_{1,2}}{O_{1,1}}, \dots, \frac{O_{1,n}}{O_{1,1}} \right) \quad (3.58)$$

Sabemos que $\|v_1\| = 1$, luego tendremos que

$$O_{1,1}^{-2} = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{O_{1,j}^2}{O_{1,1}^2}. \quad (3.59)$$

Consideremos ahora la segunda fila de O,

$$v_2 = (O_{2,1}, O_{2,2}, \dots, O_{2,n}) = O_{2,2} \left(q_{21}, 1, \dots, \frac{O_{2,n}}{O_{2,2}} \right). \quad (3.60)$$

De nuevo v_2 es unitario, por lo que análogamente

$$O_{2,2}^{-2} = 1 + q_{21}^2 + \sum_{j=3}^n \frac{O_{2,j}^2}{O_{2,2}^2}. \quad (3.61)$$

Como v_1 y v_2 son ortogonales, obtenemos

$$q_{12} = - \left[\frac{O_{1,2}}{O_{1,1}} + \sum_{j=3}^n \frac{O_{1,j}}{O_{1,1}} \frac{O_{2,j}}{O_{2,2}} \right]. \quad (3.62)$$

Por lo tanto, para cada $\{O_{i,j}/O_{i,i}, i \in \{1, 2\}, j > i\}$ existe un único par de vectores ortonormales v_1 y v_2 . Supongamos que tenemos O_{ij} para $1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq n$. Sea

$$v_k = (O_{k,1}, \dots, O_{k,n}) = O_{k,k} \left(q_{k1}, \dots, q_{k,k-1}, 1, \frac{O_{k,k+1}}{O_{k,k}}, \dots, \frac{O_{k,n}}{O_{k,k}} \right). \quad (3.63)$$

La idea es escribir los parámetros $q_{k1}, \dots, q_{k,k-1}$ en términos de $\{O_{i,j}/O_{i,i}, i \leq k, j > i\}$ a partir de la condición de que v_k es ortogonal a v_j para $j < k$. $O_{k,k}$ se escribirá a partir de todo lo demás, utilizando que v_k tiene norma uno. La condición v_k es ortogonal a v_j para $j < k$ se puede escribir como

$$\sum_{l=1}^{k-1} O_{jl} q_{kl} + O_{jk} + \sum_{l=k+1}^n O_{jl} \frac{O_{k,l}}{O_{k,k}} = 0. \quad (3.64)$$

Y matricialmente,

$$\begin{pmatrix} O_{11} & \cdots & O_{1,k-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ O_{k-1,1} & \cdots & O_{k-1,k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{k1} \\ \vdots \\ q_{k,k-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} O_{1,k} + \sum_{i=k+1}^n O_{1,i} \frac{O_{k,i}}{O_{k,k}} \\ O_{2,k} + \sum_{i=k+1}^n O_{2,i} \frac{O_{k,i}}{O_{k,k}} \\ \vdots \\ O_{k-1,k} + \sum_{i=k+1}^n O_{k-1,i} \frac{O_{k,i}}{O_{k,k}} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Las condiciones impuestas sobre O garantizan la existencia de una única solución de dicho sistema, puesto que estamos suponiendo que todos los menores de la matriz son distintos de cero. Podremos escribir por tanto

$$O_{k,k}^{-2} = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} q_{k,j}^2 + \sum_{i=k+1}^n \frac{O_{k,i}^2}{O_{k,k}^2} \quad (3.66)$$

y

$$O_{k,j} = q_{k,j} O_{k,k}, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad (3.67)$$

Notemos que los elementos $O_{k,j}$ con $j > k$ vienen determinados por $T(O)$. Evidentemente, la inversa de T es diferenciable. Así se completa la primera parte de la prueba. Denotemos $v_{ij} = O_{i,j}/O_{i,i}$. Para la segunda parte de la demostración, notemos que $v = (v_{ij}, i < j) \in T(O(n)^{v,g})$ si $v_{ij} \neq 0$ y

$$\det[v_{ij}]_{i,j=1}^k \neq 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (3.68)$$

Como tanto v_{ij} como $\det[v_{ij}]_{i,j=1}^k$ se pueden escribir como cociente de dos polinomios no nulos en v, concluimos que $T(O(n)^{dg})^c$ tiene medida de Lebesgue cero.

Sea $G_n^{v,g}$ el subconjunto de $G_n^{d,g}$ formado por las matrices X que pueden escribirse como $X = O^T D O$, con $D \in \mathcal{D}_n^{dg}$ y $O \in O(n)^{v,g}$. □

Lema 3.3.7. *La medida de Lebesgue de $G_n \setminus G_n^{v,g}$ es cero.*

Demostración:

Dada una matriz A de dimensión n y $r \leq n$, denotamos \mathcal{N}_r al conjunto de los subconjuntos $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinal r y $m = n!/[r!(n-r)!]$ el número de subconjuntos distintos. Definimos una matriz $m \times m$, del modo siguiente

$$\Lambda_r(A) = \det[A_{IJ}], \quad I, J \in \mathcal{N}_r. \quad (3.69)$$

Claramente se tiene que $\Lambda_r(A^T) = \Lambda_r(A)^T$. Además, si $D = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es una matriz diagonal, entonces $\Delta_r(D)$ es diagonal y el elemento II viene dado por el producto de λ_i con $i \in I$. La fórmula de Cauchy-Binet establece que $\Lambda_r(AB) = \Lambda_r(A)\Lambda_r(B)$, por lo que si $X \in G_n^{v,g}$ y $X = ODO^T$, con $D \in \mathcal{D}_n^{do}$ y $O \in O(n)^{v,g}$ entonces $\Lambda_r(X) = \Lambda_r(O)\Lambda_r(D)\Lambda_r(O)^T$. Repitiendo los argumentos expuestos en la demostración de la primera parte del Lema 3.3.5, podemos encontrar un polinomio en los elementos de $\Lambda_r(X)$ que se anula si $\Lambda_r(X)$ no tiene todos los valores propios distintos o $\Lambda_r(O)$ tiene alguna coordenada nula. Como los elementos de $\Lambda_r(X)$ son polinomios en las coordenadas de la matriz X , obtendríamos finalmente un polinomio en los elementos de X que se anula si $\Lambda_r(X)$ tiene algún elemento nulo, por lo que concluye la demostración. \square

Procedamos a demostrar el Teorema 3.3.1. Retomemos la aplicación introducida en el Lema 3.3.6, y definamos ahora la aplicación,

$$\begin{aligned} \hat{T}: \quad T(O(n)^{v,g}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow G_n \\ (z, \lambda) &\longmapsto T^{-1}(z)DT^{-1}(z)^T \end{aligned} \quad (3.70)$$

con $D \in \mathcal{D}_n$ y $D_{ii} = \lambda_i$. En virtud del Lema 3.3.6, \hat{T} es diferenciable, y por el Lema 3.3.5 es localmente inyectiva en casi todo punto. Denotemos $\det \hat{T}(z, \lambda)$ el jacobiano de \hat{T} y escribimos $\hat{T}(z, \lambda) = X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Notemos que $\det \hat{T}(z, \lambda)$ es un polinomio homogéneo en λ a lo sumo de grado $n(n-1)/2$, cuyos coeficientes son funciones de z . En efecto, tenemos que $x_{ij} = \sum_k O_{ik}O_{jk}\lambda_k$, luego la derivada parcial $dx_{ij}/d\lambda_k$ es independiente de λ , mientras que la derivada parcial dx_{ij}/dz_r es lineal en λ . Por consiguiente, $\det \hat{T}(z, \lambda)$ es un polinomio en λ de dimensión a lo sumo $n(n-1)/2$ cuyos coeficientes pueden depender de z . Por otro lado, si $\lambda_i = \lambda_j$ para algún $i \neq j$, entonces $\det \hat{T}(z, \lambda) = 0$, pues en caso contrario, por el Teorema de la función inversa, $\hat{T}(z, \lambda)$ sería invertible en un entorno de λ , que no es posible. Por lo tanto, el polinomio $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ debe dividir a $\det \hat{T}(z, \lambda)$. Como $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ es un polinomio de grado $n(n-1)/2$, se sigue que $J\hat{T}(z, \lambda) = h(z) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ para alguna función h continua. Entonces por el Lema 3.3.7, como el complementario del subconjunto $G_n^{v,g}$ tiene medida cero, concluimos que para cualquier función medible g definida en G_n , que depende únicamente de los valores propios, se tiene que

$$\frac{1}{Z_{n,1}} \int g(A) e^{-\frac{1}{4} \text{Tr} A^2} dA = \frac{1}{Z_{n,1}} \int h(z) dz \int g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{4} \lambda_j^2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| d\lambda_j.$$

Y se obtiene el resultado tomando $C_{n,1} = \frac{1}{Z_{n,1}} \int h(z) dz$. \square

3.3.2. Polinomios ortogonales y GUE

La función $\nabla(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ tiene, tal y como hemos visto previamente, un papel importante en la distribución de los valores propios de las colectividades Gaussianas. Para desarrollar los contenidos en esta sección, hemos tomado a [15] como referencia principal.

Proposición 3.3.8. Para cada $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\nabla(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Demostración:

Denotemos V la matriz situada a la derecha, con columnas $V = [V_1, \dots, V_n]$, donde $V_j = p(\lambda_j)$, $1 \leq j \leq n$ y p es el mismo polinomio para cada columna: $p(\lambda) = [1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}]^T$. Además, se tendrá que $\det V$ es un polinomio en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Por otra parte, puesto que el mismo polinomio es utilizado para cada columna, es claro que si $\lambda_i = \lambda_j$, V tiene dos columnas iguales y por consiguiente el determinante es 0. Por lo tanto, podremos sacar factor común a $\lambda_i - \lambda_j$ para $i \neq j$, luego ∇ dividirá a $\det V$.

Ahora, el grado de cada uno de los términos de la fila j -ésima de V es $j-1$. Utilizando la definición de determinante obtenemos

$$\det V = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=1}^n V_{i, \sigma_i}, \quad (3.72)$$

luego dicho determinante es una suma de términos, cada uno de los cuales es producto de n términos, uno de cada fila de V , lo que muestra que $\det V$ tiene grado

$$0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 = (n - 1)/2, \quad (3.73)$$

que es de hecho el grado de ∇ , y podemos deducir que $\det V = c \nabla$. Con objeto de evaluar la constancia c , tomamos el término de la diagonal en la definición de determinante (aquellos correspondientes a $\sigma = id$): $1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3^2 \cdot \dots \cdot \lambda_n^{n-1}$. Se puede verificar que el coeficiente de este monomio en ∇ es 1. En efecto, para obtener λ_n^{n-1} se ha de escoger el término λ_n de cada $(\lambda_n - \lambda_j)$ para $j < n$. Entre ellos, está el término $(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ y los términos restantes que involucran a λ_{n-1} son $(\lambda_{n-1} - \lambda_j)$ para $j < n - 1$, luego para elegir λ_{n-1}^{n-2} tendremos que seleccionar λ_{n-1} de cada uno de los anteriores. Razonando análogamente, vemos que cada uno de los factores λ_i se escoge con un signo $+$ y se contabiliza de manera única. Esto nos permite concluir que el término $1 \cdot \lambda_2 \lambda_3^2 \cdot \dots \cdot \lambda_n^{n-1}$ tiene coeficiente $+1$ en ∇ . Luego $c=1$. \square

Observando la demostración anterior, notamos que únicamente se requiere que cada columna de V , sea $V_i = p(\lambda_i)$ donde p es un polinomio $p = [p_0, \dots, p_{n-1}]^T$, tal que $p_j(\lambda) = \lambda^j + O(\lambda^{j-1})$. Este hecho se recoge en el Corolario siguiente:

Corolario 3.3.9. Sean p_0, \dots, p_n polinomios mónicos, con p_j de grado j . Sea $p = [p_0, \dots, p_{n-1}]^T$. Entonces para cada $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\det[p(\lambda_1) \ p(\lambda_2) \ \dots \ p(\lambda_n)] = \nabla(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j). \quad (3.74)$$

En vista de la libertad existente a la hora de elegir qué polinomios utilizar en la interpretación por medio de determinantes del valor ∇ (cantidad que aparece en la expresión de la función de densidad conjunta de los valores propios de las colectividades Gaussianas, Teorema 3.3.1), sería conveniente utilizar polinomios que sean ortogonales al término Gaussiano que aparece igualmente en dicha distribución. Centrándonos en el caso unitario, estos serán los polinomios de Hermite.

Definición 3.3.10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \quad (3.75)$$

H_n se denomina *n-ésimo polinomio de Hermite*. En ocasiones se definen con otra normalización. A continuación, mostramos los primeros polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Muchas de las propiedades de los polinomios de Hermite son evidentes a partir de la lista anterior. A partir de la definición 3.3.10, obtenemos la recursión

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2/2} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2/2} \right) \\ &= -e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left((-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \right) \\ &= -e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} H_n(x) \right) \\ &= -e^{x^2/2} \left(-xe^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H'_n(x) \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Luego,

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H'_n(x). \quad (3.78)$$

Proposición 3.3.11. Los polinomios de Hermite H_n satisfacen las siguientes propiedades:

- $H_n(x)$ es un polinomio mónico de grado n . Además, es una función par si n es par y una función impar si n es impar.
- Los polinomios H_n son ortogonales con respecto a la función peso $w(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) w(x) dx = \delta_{nm} n!. \quad (3.79)$$

Demostración:

La primera parte del resultado se sigue de (3.78): teniendo en cuenta que $H_n(x) = x^n + O(x^{n-1})$, tenemos que $H'_n(x) = O(x^{n-1})$, luego $H_{n+1}(x) = x(x^n + O(x^{n-1})) + O(x^{n-1}) = x^{n+1} + O(x^n)$. Además, dado que xH_n y H'_n tienen paridad opuesta a H_n , el comportamiento par o impar se obtiene de manera similar.

Por lo que respecta a la segunda parte, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) \right) e^{-x^2/2} dx. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Si $m > n$ como H_n es un polinomio de grado n , la derivada m -ésima es 0. Si $m=n$, utilizando la primera parte de la prueba tenemos que $\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = n!$. Además, como $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ es la función de densidad de una distribución normal estándar, es obvio que

$$\int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} = 1, \quad (3.81)$$

luego la integral dada en (3.80) es $n!$. Intercambiando los papeles de n y m , llegamos a que la integral es 0 si $n > m$ también. \square

Hemos visto por tanto que, para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio de Hermite H_n es mónico y de grado n , luego podemos utilizar el Corolario 3.3.9 para expresar el determinante de Vandermonde como

$$\nabla(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det \begin{pmatrix} H_0(\lambda_1) & H_0(\lambda_2) & \cdots & H_0(\lambda_n) \\ H_1(\lambda_1) & H_1(\lambda_2) & \cdots & H_1(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n-1}(\lambda_1) & H_{n-1}(\lambda_2) & \cdots & H_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} = \det[H_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^n. \quad (3.82)$$

Por lo tanto, si denotamos $\mathbf{P}_{n,2}$ la distribución de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Unitaria, para cada $B \in \mathcal{B}^n$, tendremos que

$$\mathbf{P}_{n,2}(B) = C_{n,2} \int_B (\det[H_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^n)^2 \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}} d\lambda_j. \quad (3.83)$$

Como los polinomios $H_{i-1}(\lambda_j)$ son ortogonales con respecto al peso $e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}}$, encontraremos cancelaciones que permitan simplificar la expresión de la distribución. Más aún,

Definición 3.3.12. Las *funciones de Hermite* (también llamadas funciones de onda del oscilador armónico) se definen como

$$\Psi_n(\lambda) = (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2} H_n(\lambda). \quad (3.84)$$

Las relaciones de ortogonalidad para los polinomios de Hermite con respecto a $w(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ (Proposición 3.3.11) se traducen en relaciones de ortogonalidad para las funciones de Hermite con respecto a la medida de Lebesgue. En efecto:

$$\begin{aligned} \int \Psi_n(\lambda) \Psi_m(\lambda) d\lambda &= (2\pi)^{-1/2} (n!m!)^{-1/2} \int e^{-\lambda^2/2} H_n(\lambda) H_m(\lambda) d\lambda \\ &= (n!m!)^{-1/2} \int H_n(\lambda) H_m(\lambda) w(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (3.85)$$

donde la última integral es, aplicando el resultado previamente mencionado, igual a δ_{nm} . Consideremos ahora el determinante

$$\begin{aligned} \det[\Psi_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^n &= \det \left[(2\pi)^{-1/4} ((i-1)!)^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\lambda_j^2} H_{i-1}(\lambda_j) \right]_{i,j=1}^n \\ &= (2\pi)^{-n/4} \prod_{i=1}^n ((i-1)!)^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2} \det[H_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^n. \end{aligned} \quad (3.86)$$

De esta manera, podemos escribir

$$\mathbf{P}_{n,2}(B) = C_{n,2} (2\pi)^{n/2} 1!2! \cdots (n-1)! \int_B (\det[\Psi_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^n)^2 \prod_{j=1}^n d\lambda_j. \quad (3.87)$$

Sea $V_{ij} = \Psi_{i-1}(\lambda_j)$. Tenemos que

$$(\det V)^2 = \det V^T \det V = \det(VV^T), \quad (3.88)$$

y los elementos de VV^T son

$$[V^T V]_{ij} = \sum_{k=1}^n V_{ki} V_{kj} = \sum_{k=1}^n \Psi_{k-1}(\lambda_i) \Psi_{k-1}(\lambda_j). \quad (3.89)$$

Definición 3.3.13. Se llama *n-ésimo núcleo de Hermite* a la función $K_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(x) \Psi_k(y). \quad (3.90)$$

Luego $\mathbf{P}_{n,2}$ es (salvo la constante del determinante del núcleo de Hermite),

$$\mathbf{P}_{n,2}(B) = C_{n,2} (2\pi)^{n/2} 1! 2! \cdots (n-1)! \int_B \det[K_n(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n. \quad (3.91)$$

La expresión (3.91) es útil dada la siguiente propiedad de los núcleos de Hermite.

Proposición 3.3.14. Para cada n , el núcleo K_n verifica

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x, u) K_n(u, y) du = K_n(x, y). \quad (3.92)$$

Demostración:

Aplicando la definición de K_n , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K_n(x, u) K_n(u, y) du &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(x) \Psi_k(u) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l(u) \Psi_l(y) du \\ &= \sum_{1 \leq k, l < n} \Psi_k(x) \Psi_l(y) \int_{\mathbb{R}} \Psi_k(u) \Psi_l(u) du. \\ &= \sum_{1 \leq k, l < n} \Psi_k(x) \Psi_l(y) \delta_{kl} = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(x) \Psi_k(y) = K_n(x, y), \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde la tercera igualdad se sigue de la ortogonalidad de las funciones de Hermite.

□

Esta propiedad tiene importantes consecuencias. En este contexto, una de las más interesantes se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.15. Sea $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un núcleo tal que $x \mapsto K(x, x)$ es integrable y que verifica

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, z) K(z, y) dz = K(x, y). \quad (3.94)$$

Sea $d = \int_{\mathbb{R}} K(x, x) dx$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{n-1} d\lambda_n = (d - n + 1) \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{n-1}. \quad (3.95)$$

Demostración:

Utilizando la definición de determinante, obtenemos

$$\det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} K(\lambda_1, \lambda_{\sigma(1)}) \cdots K(\lambda_n, \lambda_{\sigma(n)}). \quad (3.96)$$

Integrando con respecto a λ_n y reordenando el sumatorio anterior

$$\int_{\mathbb{R}} \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n d\lambda_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=k} (-1)^{|\sigma|} \int_{\mathbb{R}} K(\lambda_1, \lambda_{\sigma(1)}) \cdots K(\lambda_n, \lambda_{\sigma(n)}) d\lambda_n. \quad (3.97)$$

Cuando $k = n$, tenemos

$$\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} (-1)^{|\sigma|} K(\lambda_1, \lambda_{\sigma(1)}) \cdots K(\lambda_{n-1}, \lambda_{\sigma(n-1)}) \int_{\mathbb{R}} K(\lambda_n, \lambda_n) d\lambda_n. \quad (3.98)$$

Y la integral es por definición d . Ahora bien como toda permutación en S_n que fije n puede verse como una permutación en S_{n-1} y eliminar el elemento fijo no afecta a $|\sigma|$, podemos escribir

$$\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} (-1)^{|\sigma|} K(\lambda_1, \lambda_{\sigma(1)}) \cdots K(\lambda_{n-1}, \lambda_{\sigma(n-1)}) \int_{\mathbb{R}} K(\lambda_n, \lambda_n) d\lambda_n = d \cdot \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{n-1}.$$

Para los términos restantes, si $\sigma(n) = k < n$, entonces tendremos también que para algún $j < n$, $\sigma(j) = n$. Por lo tanto tendremos dos términos dentro de la integral, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=k} (-1)^{|\sigma|} K(\lambda_1, \lambda_{\sigma(1)}) \cdots K(\lambda_{j-1}, \lambda_{\sigma(j-1)}) K(\lambda_{j+1}, \lambda_{\sigma(j+1)}) \cdots K(\lambda_{n-1}, \lambda_{\sigma(n-1)}) \\ \times \int_{\mathbb{R}} K(\lambda_j, \lambda_n) K(\lambda_n, \lambda_k) d\lambda_n. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Por hipótesis, la integral es $K(\lambda_j, \lambda_k)$. Luego, los términos restantes se indexan mediante una permutación que envía j a k (en lugar de n), y fija n . Sea $\hat{\sigma} = (n, k) \cdot \sigma$,

$$\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=k} (-1)^{|\hat{\sigma}|} K(\lambda_1, \lambda_{\hat{\sigma}(1)}) \cdots K(\lambda_{n-1}, \lambda_{\hat{\sigma}(n-1)}). \quad (3.100)$$

Claramente $(-1)^{|\hat{\sigma}|} = -(-1)^{|\sigma|}$, luego cada uno de esos términos es igual a $-\det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^{n-1}$ y k recorre desde 1 hasta $n-1$, sumando se obtiene el resultado.

□

Por inducción sobre la Proposición 3.3.15, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n d\lambda_1 \cdots d\lambda_n = (d-n+1)(d-n+2) \cdots d. \quad (3.101)$$

Ahora si tomamos $K = K_n$ el n -ésimo núcleo de Hermite,

$$d = \int_{\mathbb{R}} K_n(x, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(x)^2 dx = n, \quad (3.102)$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\det[K_n(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n] d\lambda_1 \cdots d\lambda_n = n!. \quad (3.103)$$

Por lo tanto, tendremos que

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{P}_{n,2}(\mathbb{R}^n) \\ &= C_{n,2}(2\pi)^{n/2} 1!2! \cdots (n-1)! \int_{\mathbb{R}^n} \det[K_n(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \\ &= C_{n,2}(2\pi)^{n/2} 1!2! \cdots (n-1)!n!. \end{aligned} \quad (3.104)$$

De este modo, podemos calcular explícitamente la constante $C_{n,2}$, que de hecho tomará el valor

$$C_{n,2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} 1!2! \cdots (n-1)!n!}. \quad (3.105)$$

Así, finalmente concluimos que la distribución de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Unitaria es

$$\mathbf{P}_{n,2}(B) = \frac{1}{n!} \int_B \det[K_n(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^n d\lambda_1 \cdots d\lambda_n. \quad (3.106)$$

3.3.3. Funciones de correlación de los valores propios de la GUE

La referencia principal utilizada en esta sección es [2].

Definición 3.3.16. Sea $k \leq n$. Las *funciones de correlación* de k puntos de los valores propios de la GUE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se definen como

$$p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_{n,2}(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n, \quad (3.107)$$

para $k = 1, \dots, n$ y $f_{n,2}$ denota la función de densidad conjunta de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Las funciones de correlación de k puntos son, salvo una constante, las distribuciones marginales de $f_{n,2}$. Más generalmente, $p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ es la probabilidad de encontrar un valor propio cerca de cada uno de los puntos x_1, \dots, x_k . El factor $n!/(n-k)!$ proviene de la elección de los k puntos y de la simetría de $f_{n,2}$. El objetivo en esta sección será obtener la expresión de las funciones de correlación de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Unitaria. Notemos en primer lugar que este tipo de funciones permiten asimismo calcular determinadas cantidades probabilísticas:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible considerando la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} sobre \mathbb{R} . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n (1 + f(\lambda_i))\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f(\lambda_{i_1}) \cdots f(\lambda_{i_k})\right] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f(\lambda_{i_1}) \cdots f(\lambda_{i_k})\right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbb{E}[f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_k)] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{E}[f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_k)] \end{aligned} \quad (3.108)$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n (1 + f(\lambda_i))\right] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1) \cdots f(x_k) p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k. \quad (3.109)$$

Supongamos que $f = -I_B$ donde $B \in \mathcal{B}$, es el indicador de B . Entonces,

$$\mathbb{P}(\lambda_i \notin B, 1 \leq i \leq n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_{B^k} p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k. \quad (3.110)$$

En particular, si tomamos $B = (s, \infty)$, se tendrá que

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max} \leq s) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_{(s, \infty)^k} p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k. \quad (3.111)$$

Proposición 3.3.17. *Las funciones de correlación de k puntos de los valores propios de la GUE están dadas por*

$$p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}, \quad (3.112)$$

donde K_n es el n -ésimo núcleo de Hermite.

Demostración:

Teniendo en cuenta la expresión (3.106) de la distribución de los valores propios de la Colectividad Gaussiana Unitaria, obtenida en la sección precedente, tenemos que

$$f_{n,2}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (3.113)$$

Por lo tanto,

$$p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} dx_{k+1} \cdots dx_n. \quad (3.114)$$

Tenemos que integrar $n-k$ veces, siendo cada uno de los casos similar. Para $m \leq n$ desarrollamos el determinante por la última columna para obtener,

$$\begin{aligned} \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} &= K_n(x_m, x_m) \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} K_n(x_k, x_m) \det \begin{pmatrix} K_n(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq m-1, i \neq k} \\ K_n(x_m, x_j)_{1 \leq j \leq m-1} \end{pmatrix} \\ &= K_n(x_m, x_m) \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \det \begin{pmatrix} K_n(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq m-1, i \neq k} \\ K_n(x_k, x_m) K_n(x_m, x_j)_{1 \leq j \leq m-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Entonces, por lo calculado en (3.102) y utilizando la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m} dx_m &= n \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \det \begin{pmatrix} K_n(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq m-1, i \neq k} \\ K_n(x_k, x_j)_{1 \leq j \leq m-1} \end{pmatrix} \\ &= n \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1} \\ &= (n-m+1) \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m-1}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

ya que $\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} = -m + 1$. Finalmente, aplicando este resultado a $m = n, n-1, \dots, k+1$ y utilizando el teorema de Fubini, obtenemos

$$p_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}. \quad (3.117)$$

□

Así, las funciones de correlación de los valores propios de la GUE son simplemente determinantes de ciertas funciones de dos variables, y por consiguiente no se requerirá del uso de la integración para evaluarlas una vez que se conoce $K_n(x, y)$.

Capítulo 4

Colectividades circulares de matrices aleatorias

De ahora en adelante, dado un grupo topológico compacto G , supondremos que μ es la medida de Haar sobre G normalizada. En este último capítulo abordamos un estudio de las denominadas colectividades circulares de matrices aleatorias, introducidos por primera vez por Freeman Dyson en 1962, con el fin de simplificar el estudio del comportamiento de los niveles energéticos en sistemas cuánticos complejos. El término circular hace referencia al hecho de que los valores propios de las matrices de estos modelos se encuentran en la circunferencia unidad en el plano complejo. Los principales ejemplos son: Colectividad Circular Ortogonal (COE), Colectividad Circular Unitaria (CUE) y Colectividad Circular Simplética (CSE).

Comenzaremos exponiendo la definición de las tres colectividades circulares en las cuales nos centraremos en este apartado. A continuación, expondremos un método para generar matrices aleatorias unitarias cuya distribución coincide con la medida de Haar en el grupo unitario, para lo que procederemos a la introducción de otros modelos de matrices, las denominadas colectividades de Ginibre. Finalizaremos con una serie de comentarios acerca de los valores propios de las colectividades circulares, incluyendo en este contexto, la exposición de una de las conexiones existentes entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números. La principal referencia utilizada a lo largo de este capítulo es [19].

4.1. CUE, COE y CSE

En el Capítulo 2 probamos que el grupo $U(n)$ de matrices unitarias es un subgrupo topológico compacto de $GL(n, \mathbb{C})$. Por lo tanto, éste último se convierte en un espacio probabilístico si asignamos como distribución la única medida sobre $U(n)$ invariante por traslación izquierda y derecha, la medida de Haar. Esto es, la única probabilidad μ tal que para cada conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(U(n))$ y matriz $U \in U(n)$, verifique que

$$\mu(B) = \mu(UB) = \mu(BU), \quad (4.1)$$

donde $UB := \{UA : A \in B\}$ y $BU := \{AU : A \in B\}$.

Definición 4.1.1. El grupo $U(n)$ de matrices unitarias $n \times n$ dotado con la medida de Haar normalizada se denomina *Colectividad Circular Unitaria* (CUE).

Los entradas de una matriz aleatoria unitaria distribuida con la medida de Haar son obviamente dependientes, en tanto que, por ejemplo, la suma de los cuadrados de los valores absolutos de los

elementos de una misma fila o columna es 1. No obstante, la invarianza por traslación izquierda de la medida de Haar implica que sus entradas están igualmente distribuidas. La prueba del siguiente resultado se toma de [17], generalizando el caso allí expuesto para matrices ortogonales, al grupo de matrices unitarias.

Proposición 4.1.2. *Sea $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz aleatoria unitaria cuya distribución es la medida de Haar sobre $U(n)$. Entonces las variables aleatorias $\{u_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ están igualmente distribuidas.*

Demostración:

Para cada permutación $\sigma \in S_n$, consideramos la matriz unitaria $M_\sigma = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, habitualmente denominada matriz permutación asociada a σ , definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{si en otro caso} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Entonces la multiplicación a izquierda, resp. a derecha, por la matriz M_σ permuta las filas, resp. columnas de U , según σ . En consecuencia, podremos mover cualquier elemento u_{ij} de U , a la posición, por ejemplo, $(1, 1)$ de la matriz, multiplicando a izquierda y a derecha por matrices en $U(n)$. Ahora, por la invarianza de la medida de Haar por el producto a izquierda y a derecha por matrices unitarias arbitrarias, se tendrá que cualquier variable u_{ij} estará igual distribuida que u_{11} . Concluimos por tanto, que todas las entradas de la matriz están igualmente distribuidas. \square

A partir del resultado anterior, podemos calcular fácilmente el momento de orden dos de los elementos de la matriz U . Tal y como veremos más adelante, las columnas de una matriz unitaria forman una base ortonormal en \mathbb{C}^n . Por consiguiente, se tendrá que $\sum_{j=1}^n |u_{1j}|^2 = 1$ y como todas las entradas de la matriz están igualmente distribuidas

$$\mathbb{E}[|u_{11}|^2] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|u_{1j}|^2] = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n |u_{1j}|^2 \right) = \frac{1}{n}. \quad (4.3)$$

De manera similar, es posible obtener asimismo la media de la variable u_{11} , es decir, $\mathbb{E}[u_{11}]$. De nuevo, por la propiedad de la invarianza por traslación izquierda de la medida de Haar en el grupo unitario, tendremos que si M es la matriz dada por

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

entonces MU y U tienen la misma distribución. Pero observemos que la matriz que resulta al multiplicar por M , es la matriz U con la primera fila cambiada de signo. Es decir, las variables u_{11} y $-u_{11}$ están igualmente distribuidas, luego $\mathbb{E}[u_{11}] = 0$.

Denotemos \mathbf{O} al conjunto de las matrices unitarias simétricas, i.e si $U \in \mathbf{O}$ entonces $U = U^T$ y $UU^* = U^*U = I_n$. Observemos que si $U \in U(n)$, entonces $UU^T \in \mathbf{O}$, por lo que podemos definir la siguiente aplicación:

$$T_1: \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & \mathbf{O} \\ U & \longmapsto & UU^T \end{array} \quad (4.5)$$

Entonces, la medida imagen de la medida de Haar en $U(n)$ por T_1 es una medida en \mathbf{O} , que denotamos μ_1 y se define para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbf{O})$ como

$$\mu_1(B) = \mu(T_1^{-1}(B)). \quad (4.6)$$

Definición 4.1.3. Se llama *Colectividad Circular Ortogonal* (COE), al espacio de matrices simétricas unitarias \mathbf{O} con la medida μ_1 .

Tenemos que la aplicación T_1 es sobreyectiva, es decir, dada una matriz $W \in \mathbf{O}$, existe $U \in \mathbf{U}(n)$ tal que

$$W = UU^T. \quad (4.7)$$

Para hacerla inyectiva consideramos el conjunto de clases definido por $\mathbf{O}(n)$ en $\mathbf{U}(n)$. Es decir, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1: \quad \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n) &\longrightarrow \mathbf{O} \\ U\mathbf{O}(n) &\longmapsto UU^T \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lo primero es ver que está bien definida, esto es, comprobamos que en efecto \tilde{T}_1 es aplicación. Sea $U' = UO$, con $O \in \mathbf{O}(n)$. Entonces, es claro que

$$U'U'^T = UOO^T U^T = UU^T. \quad (4.9)$$

En cuanto a la inyectividad de \tilde{T}_1 , nótese que si $\tilde{T}_1(U\mathbf{O}(n)) = \tilde{T}_1(U'\mathbf{O}(n))$ es porque $UU^T = U'U'^T$, de donde

$$U^{-1}U'U'^T(U^T)^{-1} = U^{-1}U'(U^{-1}U')^T = I_n, \quad (4.10)$$

luego $U^{-1}U' \in \mathbf{O}(n)$, lo que significa que $U\mathbf{O}(n) = U'\mathbf{O}(n)$. Así, el COE se identifica con el cociente $\mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$ junto con la medida inducida por la proyección canónica $\pi_1 : \mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$ en dicho espacio.

Consideremos ahora el subconjunto $\mathbf{S} \subset \mathbf{U}(2n)$, tal que si $W \in \mathbf{S}$, W admite una representación:

$$W = -UJU^T J, \quad U \in \mathbf{U}(2n), \quad (4.11)$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Como antes, si denotamos T_4 la aplicación dada por

$$\begin{aligned} U(2n) &\longrightarrow \mathbf{S} \\ U &\longmapsto -UJU^T J, \end{aligned} \quad (4.13)$$

tenemos que la medida de Haar μ en $\mathbf{U}(2n)$ induce una medida en \mathbf{S} , μ_4 , tal que para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbf{S})$ está definida como

$$\mu_4 = \mu(T_4^{-1}(B)). \quad (4.14)$$

Definición 4.1.4. Se define la *Colectividad Circular Simplética* como el espacio de matrices \mathbf{S} junto con la medida imagen de la medida de Haar en $\mathbf{U}(2n)$ por T_4 .

Veamos que \mathbf{S} es también isomorfo a un cociente. Para ello, introducimos en primer lugar, un subgrupo de $\mathbf{U}(2n)$:

Definición 4.1.5. El *grupo unitario simplético* $\mathbf{USp}(2n)$ es el subgrupo de $\mathbf{U}(2n)$, cuyos elementos satisfacen la identidad

$$SJS^T = J, \quad S \in \mathbf{USp}(2n). \quad (4.15)$$

Por definición de \mathbf{S} , obviamente T_4 es sobreyectiva. Como antes, para que T_4 sea inyectiva consideramos las clases de $\mathbf{U}(2n)/\mathbf{USp}(2n)$ y definimos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_4: \quad \mathbf{U}(2n)/\mathbf{USp}(2n) &\longrightarrow \mathbf{S} \\ U\mathbf{USp}(2n) &\longmapsto -UJU^T J \end{aligned} \quad (4.16)$$

Claramente \tilde{T}_4 está bien definida, puesto que si $U' = US$, con $S \in \text{USp}(2n)$ obtenemos que

$$-U'JU'^TJ = -USJS^TU^TJ = -UJU^TJ. \quad (4.17)$$

Además, si $\tilde{T}_4(U\text{USp}(2n)) = \tilde{T}_4(U'\text{USp}(2n))$, entonces $-UJU^TJ = -U'JU'^TJ$ y por consiguiente

$$U^{-1}U'JU'^T(U^T)^{-1} = U^{-1}U'J(U^{-1}U')^T = J. \quad (4.18)$$

Entonces $U^{-1}U' \in \text{USp}(2n)$ y \tilde{T}_4 es inyectiva. De este modo, la Colectividad Circular Simpléctica se identifica con el espacio cociente $U(2n)/\text{USp}(2n)$ junto con la medida imagen de la medida de Haar en $U(2n)$ por la proyección canónica $\pi_4 : U(2n) \longrightarrow U(2n)/\text{USp}(2n)$.

4.2. Matrices aleatorias unitarias distribuidas con la medida de Haar

En lo que sigue mostraremos un método para determinar matrices aleatorias aleatorias cuya distribución coincide con la medida de Haar en $U(n)$, esto es, matrices aleatorias que toman valores en la CUE. Utilizando las aplicaciones T_1 y T_4 definidas en la sección anterior, la obtención de matrices aleatorias de la COE y CSE sería una tarea inmediata una vez consideradas matrices de la CUE.

En primer lugar, introduciremos otro modelo de matrices aleatorias. En 1965, Ginibre introdujo tres nuevos modelos de matrices aleatorias no hermitianas. Son las ahora denominadas colectividades de Ginibre. Las matrices aleatorias que toman valores en estos espacios probabilísticos, se caracterizan por tener entradas indepedientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar.

Definición 4.2.1. Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz aleatoria tal que $\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución normal estándar, es decir,

$$a_{ij} \sim N(0, 1). \quad (4.19)$$

Se denomina *Colectividad de Ginibre Real* (RGE) al espacio de matrices $n \times n$ con entradas en \mathbb{R} junto con la distribución de la matriz A. Análogamente, sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz aleatoria, donde para $1 \leq i, j \leq n$ se tiene que

$$a_{ij} = \overset{(1)}{a_{ij}} + i\overset{(2)}{a_{ij}}, \text{ con } \overset{(\cdot)}{a_{ij}} \sim N(0, \frac{1}{2}), \quad (4.20)$$

son variables aleatorias independientes complejas normales estándar. Llamaremos *Colectividad de Ginibre Compleja* (CGE) al espacio probabilístico integrado por $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ y la distribución de la matriz aleatoria A. Por último, denominaremos *Colectividad de Ginibre Cuaterniónica* (QCE) al conjunto de matrices de dimensión $n \times n$ con entradas en \mathbb{H} , junto con la distribución de probabilidad de una matriz aleatoria $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tal que las variables aleatorias a_{ij} son cuaterniones normales (estándar) independientes, esto es

$$a_{ij} = \overset{(1)}{a_{ij}} + i\overset{(2)}{a_{ij}} + j\overset{(3)}{a_{ij}} + k\overset{(4)}{a_{ij}}, \text{ con } \overset{(\cdot)}{a_{ij}} \sim N(0, \frac{1}{4}). \quad (4.21)$$

Diremos que A es una matriz aleatoria de la RGE, CGE ó QGE respectivamente.

Observación 4.2.2. Notemos que los valores propios de las matrices de las colectividades de Ginibre pueden ser complejos, puesto que no imponemos la condición de hermiticidad.

En lo que sigue, nos centraremos en el estudio de la Colectividad de Ginibre Compleja. Observemos que este modelo de matrices tiene ciertas similitudes con la Colectividad Gaussiana Unitaria. No obstante, la presencia de valores propios tanto reales como complejos, hace que se manifieste una situación particular. Sea

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}Z, \quad (4.22)$$

donde Z es una matriz $n \times n$ de la CGE. La denominada *ley circular* establece que, cuando $n \rightarrow \infty$, la distribución empírica de los valores propios de Z_n , μ_{Z_n} , converge débilmente, en probabilidad a la distribución uniforme en el disco unidad $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (véase la Figura 4.1).

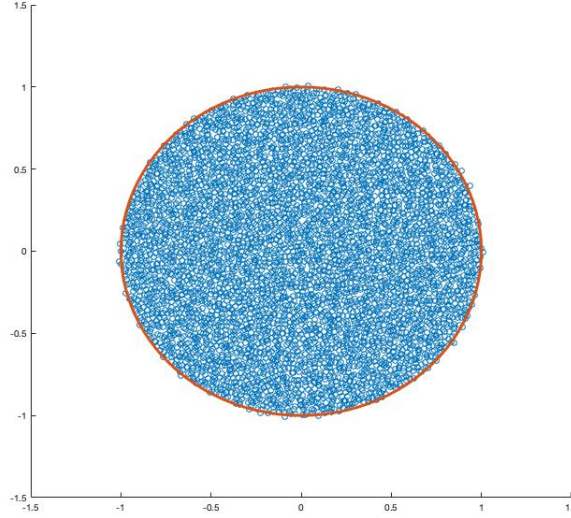


Figura 4.1: Representación de los valores propios de una realización de una matriz aleatoria de la Colectividad de Ginibre Compleja 5000×5000 . Se compara con la circunferencia unidad (rojo). Realizado con Matlab.

Si $Z = (Z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz de la CGE, entonces la función de densidad de cada variable Z_{ij} vendrá dada por

$$\frac{1}{\pi} e^{-|z_{ij}|^2}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (4.23)$$

Por definición, los elementos de Z son independientes, por lo que la función de densidad conjunta (con respecto a $dZ := \prod_{i,j=1}^n d\operatorname{Re} z_{ij} d\operatorname{Im} z_{ij}$) coincide con el producto de las marginales, luego

$$\frac{1}{\pi^{n^2}} \prod_{i,j=1}^n e^{-|z_{ij}|^2} = \frac{1}{\pi^{n^2}} e^{-\sum_{i,j=1}^n |z_{ij}|^2} = \frac{1}{\pi^{n^2}} e^{-\operatorname{Tr} Z^* Z} = \frac{1}{\pi^{n^2}} e^{-\|Z\|_F^2}, \quad Z = (z_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}). \quad (4.24)$$

Denotemos μ_G la distribución de la Colectividad de Ginibre Compleja, esto es, la probabilidad definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}))$ cuya función de densidad con respecto a dZ viene dada por la expresión (4.24).

Proposición 4.2.3. *Para cada $U \in \operatorname{U}(n)$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}))$, se tiene que*

$$\mu_G(U^* B) = \mu_G(BU^*) = \mu_G(B) \quad (4.25)$$

Demostración:

Sea $Z \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Como $U^*U = I_n$, tenemos que:

$$\frac{1}{\pi^{n^2}} \exp(-\text{Tr} Z^* U^* U Z) = \frac{1}{\pi^{n^2}} \exp(-\text{Tr} Z^* Z), \text{ para cada } U \in U(n). \quad (4.26)$$

Por lo tanto, bastará ver que el Jacobiano de la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_U: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ Z &\longmapsto UZ \end{aligned} \quad (4.27)$$

es uno. Pero es claro, ya que la matriz jacobiana es

$$J_{\phi_U} = \text{diag}(\underbrace{U, \dots, U}_{(n)}), \quad (4.28)$$

esto es, J_{ϕ_U} es la matriz de dimensión $n^2 \times n^2$ cuyos elementos de la diagonal son las matrices U y el resto de las entradas son nulas. Por tanto, J_{ϕ_U} es una matriz unitaria y se tiene que $|\det J_{\phi_U}| = 1$. Finalmente, si $X = UZ$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_G(B) &= \int_B \frac{1}{\pi^{n^2}} \exp(-\text{Tr} X^* X) dX \\ &= \int_{U^*B} \frac{1}{\pi^{n^2}} \exp(-\text{Tr} Z^* U^* U Z) |\det J_{\phi_U}(Z)| dZ \\ &= \mu_G(U^*B) \end{aligned} \quad (4.29)$$

De manera similar se prueba que $\mu_G(BU^*) = \mu_G(B)$. \square

Proposición 4.2.4. *Si Z es una matriz aleatoria de la Colectividad de Ginibre Compleja, entonces $Z \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ con probabilidad uno.*

Demostración:

Supongamos que tomamos $n - 1$ vectores en \mathbb{C}^n al azar (columnas de Z). Estos vectores generan un subespacio vectorial $V \neq \mathbb{C}^n$. Como cada subespacio vectorial propio de \mathbb{C}^n tiene medida de Lebesgue cero, la probabilidad de que la última columna esté en V es cero (notemos que la distribución de la CGE es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue). Luego concluimos que Z es invertible con probabilidad uno. \square

Por lo tanto, podemos pensar en la colectividad de Ginibre como una distribución de probabilidad sobre $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. La idea fundamental detrás del método que vamos a introducir a continuación para generar matrices unitarias elegidas al azar de acuerdo con la medida de Haar en el grupo unitario es obtener la factorización QR de una realización de una matriz de la Colectividad de Ginibre Compleja y tomar la matriz Q resultante de dicha factorización.

Por definición, una matriz unitaria $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, verifica $U^*U = UU^* = I_n$, donde $U^* = (u_{ij}^*)$ es la matriz traspuesta conjugada de U , i.e $u_{ij}^* = \bar{u}_{ji}$ e I_n denota la matriz identidad $n \times n$. Esta condición, en términos de los elementos de las matrices, puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_{ik}^* u_{kj} &= \sum_{k=1}^n \bar{u}_{ki} u_{kj} = \delta_{ij} \\ \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{kj}^* &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \bar{u}_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Las restricciones dadas en (4.30) establecen que las columnas (filas) de U forman una base ortonormal en \mathbb{C}^n . Por lo tanto, si tomamos cualquier matriz $Z \in GL(n, \mathbb{C})$ y aplicamos el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a sus columnas, la matriz resultante Q es unitaria.

Sea $T : GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow U(n)$ la aplicación que a cada matriz invertible Z le asocia la matriz cuyas columnas son la ortonormalización de Gram-Schmidt de las columnas Z . Notemos que T es continua, y por tanto medible si consideramos la σ -álgebra de Borel en ambos espacios. Sea $Z \in GL(n, \mathbb{C})$ y $U \in U(n)$ una matriz unitaria. Si escribimos $Q = T(Z)$ y q_1, \dots, q_n son sus columnas, tenemos que la i -ésima columna de la matriz UQ es

$$\begin{aligned} Uq_i &= \frac{Uz_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle z_i, q_k \rangle Uq_k}{\|Uz_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle z_i, q_k \rangle Uq_k\|} \\ &= \frac{Uz_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle Uz_i, Uq_k \rangle Uq_k}{\|Uz_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle Uz_i, Uq_k \rangle Uq_k\|} \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde z_i es la i -ésima columna de Z y para cada de vectores $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ $\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i$. Por lo tanto, los vectores columna de UQ coinciden con la ortonormalización de Gram-Schmidt de las columnas de la matriz UZ . En otras palabras, se verifica que $UT(Z) = T(UZ)$.

Por definición, si Z es una matriz de la CGE definida en un espacio probabilístico $(\Omega, \sigma, \mathbf{P})$, tenemos que $\mu_G = \mathbb{P}_Z$ y por la Proposición 4.2.3, $\mathbb{P}_{UZ} = \mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{ZU}$ para cada matriz unitaria $U \in U(n)$.

La medida imagen de μ_G por T es una medida μ' en $U(n)$, definida para cada $B \in \mathcal{B}(U(n))$ como

$$\mu'(B) = \mu_G(T^{-1}(B)). \quad (4.32)$$

Observemos que μ' es invariante por traslación izquierda y derecha: sea $U \in U(n)$ y $B \in \mathcal{B}(U(n))$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu'(UB) &= \mu_G(T^{-1}(UB)) = \mathbb{P}_Z(T^{-1}(UB)) = \mathbb{P}_{UZ}(T^{-1}(UB)) \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : UZ(\omega) \in T^{-1}(UB)\}] \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : T(UZ(\omega)) \in UB\}] \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : UT(Z(\omega)) \in UB\}] \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : T(Z(\omega)) \in B\}] = \mathbf{P}[(T \circ Z)^{-1}(B)] \\ &= \mathbb{P}_Z(T^{-1}(B)) = \mu_G(T^{-1}(B)) = \mu'(B). \end{aligned} \quad (4.33)$$

De manera similar, vemos que $\mu'(BU) = \mu'(B)$. Por lo tanto, μ' es una medida definida en la σ -álgebra de Borel sobre el grupo unitario invariante por traslación izquierda y derecha, luego ha de coincidir con la medida de Haar normalizada. Notemos que $\mathbb{P}_{T \circ Z} = \mu'$, esto es, la distribución de la matriz aleatoria $T \circ Z$ es la medida de Haar en $U(n)$.

Entonces para generar una matriz unitaria elegida al azar según la medida de Haar, es decir, una realización de la matriz aleatoria $T \circ Z$, bastará tomar una realización de una matriz de la CGE y aplicar el método de Gram-Schmidt a sus columnas.

No obstante, el método de Gram-Schmidt no es numéricamente estable debido a la acumulación de errores por redondeo por lo que no se suele implementar en la práctica. Pero observemos que dada cualquier matriz invertible Z , se tiene que

$$Z = T(Z)R \quad (4.34)$$

con R triangular superior y invertible. Es decir, el método de Gram-Schmidt determina una factorización QR de la matriz Z . De hecho, determina la única factorización QR tal que los elementos de la diagonal de R son reales y estrictamente positivos.

Entonces, podría parecer que basta con considerar una realización de una matriz aleatoria Z de la CGE, calcular su factorización QR utilizando por ejemplo, el comando `qr` de MATLAB y tomar la matriz Q resultante de dicha descomposición. Sin embargo, hay que prestar especial atención, puesto que puede ocurrir que la matriz obtenida, como ilustraremos más adelante en la Figura 4.3, no la hayamos tomado al azar de acuerdo con la medida de Haar en el grupo unitario. Pero, ¿Cuál es la razón por la que esto puede ocurrir?. El problema reside en que la factorización QR no se define de manera única y la que se obtiene con la mayoría de las rutinas que calculan esta descomposición, no es la única tal que los elementos de la diagonal son estrictamente positivos, es decir, no es la factorización QR que se obtiene mediante el método de Gram-Schmidt. Si por ejemplo, consideramos una matriz diagonal de la forma

$$X = \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\theta_n} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

entonces las matrices

$$\bar{Q} = QX, \text{ y } \bar{R} = X^{-1}R, \quad (4.36)$$

son unitaria y triangular superior respectivamente, y además $Z = \bar{Q}\bar{R}$ es una factorización QR válida de Z .

En la práctica, con objeto de solventar el problema de la unicidad de la factorización, podemos proceder del siguiente modo:

Tomamos una matriz $Z \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ cuyos elementos son números complejos aleatorios con parte real e imaginaria normalmente distribuidas y obtenemos la factorización QR de Z . A continuación, generamos la matriz diagonal siguiente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{|r_{11}|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{r_{nn}}{|r_{nn}|} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

donde los r_{ii} s son los elementos de la diagonal de R . Entonces, los elementos de la diagonal de $\bar{R} = \Delta^{-1}R$ son reales y estrictamente positivos, luego las matrices $\bar{Q} = Q\Delta$ y \bar{R} conforman la única factorización QR de Z . Concluimos que $\bar{Q} = Q\Delta$ es una matriz unitaria elegida al azar de acuerdo con la medida de Haar en $U(n)$.

Observación 4.2.5. Para obtener matrices de los espacios probabilísticos COE (resp. CSE), basta tomar de una matriz aleatoria unitaria $n \times n$ (resp. $2n \times 2n$) distribuida con la medida de Haar en $U(n)$ y calcular UU^T (resp. UJU^T , siendo J la matriz dada en 4.11).

Por último, comentar que asimismo es posible generar matrices ortogonales y simplécticas elegidas de acuerdo con las respectivas medidas de Haar en $O(n)$ y $Sp(n)$, siguiendo el procedimiento previamente discutido para matrices unitarias, obteniendo la (única) factorización QR de realizaciones de matrices de las colectividades de Ginibre real y cuaterniónica respectivamente.

4.3. Algunos comentarios sobre los valores propios de las colectividades circulares

Los valores propios de estos modelos de matrices aleatorias aparecen, entre otros, en problemas aplicados de encriptación telefónica, en la comprensión de los ceros de la función zeta de Riemann y gran variedad de problemas de Física. Se puede consultar más información acerca de estas aplicaciones en [5].

Una matriz unitaria es siempre diagonalizable en $U(n)$, y tiene todos sus valores propios en la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Si $U \in U(n)$ es una matriz aleatoria distribuida con la medida de Haar, el conjunto de sus valores propios es una colección de n puntos aleatorios en \mathbb{S}^1 . Comencemos este apartado comentando una peculiaridad de los valores propios de la CUE. En la Figura 1 (a), se muestran los valores propios de una realización de una matriz aleatoria unitaria 100×100 distribuida con la medida de Haar en $U(n)$. En (b), se representan 100 puntos elegidos de manera uniforme e independiente en la circunferencia unidad. Si bien es cierto que existe en (a) alguna variación local, los valores propios de la matriz unitaria generada, están bien distribuidos en la circunferencia unidad. En (b), se muestra como los puntos completamente aleatorios presentan una variabilidad mucho mayor.

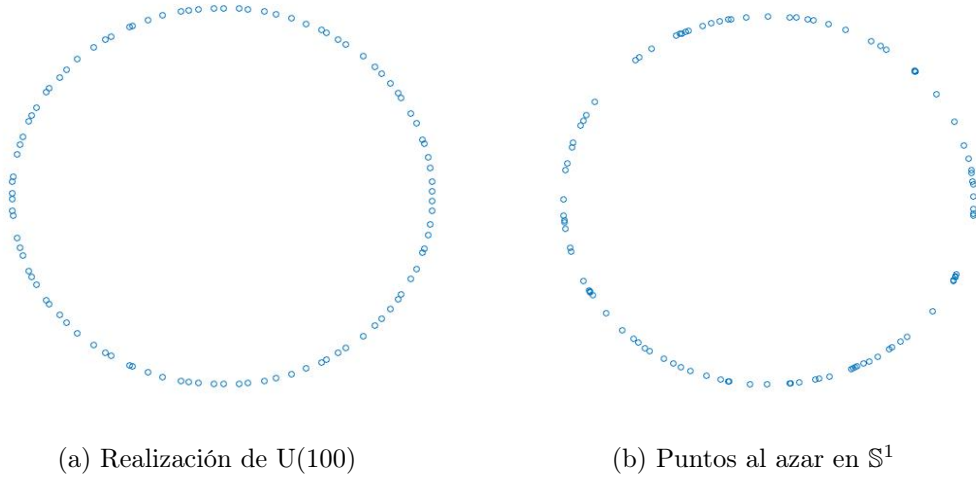


Figura 4.2: Representación de los valores propios de una realización de una matriz aleatoria unitaria 100×100 distribuida con la medida de Haar y de 100 puntos independientes tomados al azar en la circunferencia unidad. Realizado con Matlab.

Introducimos a continuación el resultado central de la Sección. Tal y como procedimos con las colectividades Gaussianas incluimos, esta vez sin demostración, la expresión de la distribución de los valores propios de estos modelos de matrices. Una prueba clásica del siguiente teorema puede consultarse en [17].

Teorema 4.3.1. *La distribución conjunta de los argumentos de los valores propios de las colectividades circulares CUE, COE o CSE viene dada por,*

$$\frac{1}{(\alpha_{n,\beta})} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^\beta \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi}. \quad (4.38)$$

donde $\beta = 1, 2, 4$ corresponde a la colectividad circular ortogonal, unitaria y simpléctica respectivamente. La constante de normalización $\alpha_{n,\beta}$ viene dada por

$$\alpha_{n,\beta} = \frac{\Gamma(\beta n/2 + 1)}{(\Gamma(\beta/2 + 1))^n}. \quad (4.39)$$

En particular, si $g : U(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que para cada $U, V \in U(n)$,

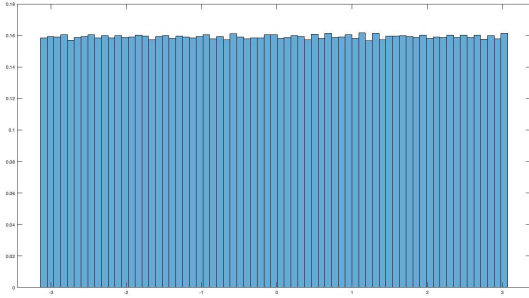
$$g(U) = g(VUV^*), \quad (4.40)$$

y U está distribuida con la medida de Haar, entonces el Teorema 4.3.1 establece que

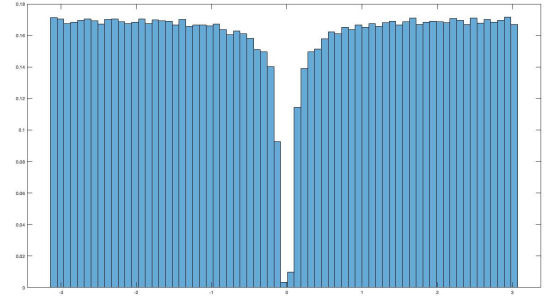
$$\mathbb{E}[g(U)] = \frac{1}{n!(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi)^n} \tilde{g}(\theta_1, \dots, \theta_n) \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \dots d\theta_n. \quad (4.41)$$

donde $\tilde{g} : [0, 2\pi)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la expresión de $g(U)$ como una función en los valores propios de U . Notemos que la función de densidad dada en el Teorema 4.3.1 tiende a cero, cuando θ_j, θ_k se acercan entre sí, por lo que los valores propios tienden a replerse.

La medida de Haar proporciona una probabilidad natural en $U(n)$; 'natural' en el sentido de que se comporta como una distribución uniforme. Por lo tanto, la distribución de los argumentos θ_j con $1 \leq j \leq n$, de los valores propios $\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}\}$ de una matriz aleatoria unitaria $n \times n$ distribuida con la medida de Haar en $U(n)$ debería ser uniforme, por lo que se espera que el histograma de la función de densidad de los argumentos correspondientes a los valores propios de realizaciones de dicha matriz, sea similar al de la función de densidad de una uniforme $(-\pi, \pi)$. Corrobores numéricamente esta última observación, reproduciendo un experimento similar al llevado a cabo en [9]. Para ello, generamos 1000 realizaciones de una matriz aleatoria unitaria 100×100 distribuida con la medida de Haar, tomando las matrices unitarias resultantes de la (única) factorización QR de 1000 matrices cuyos elementos son números complejos normalmente distribuidos y representamos en un histograma la función de densidad empírica de los argumentos de los valores propios correspondientes a dichas matrices (Figura 4.3a). Observamos claramente la similitud existente con la gráfica de la función de densidad de una uniforme entre $-\pi$ y π .



(a) Matrices distribuidas con la medida de Haar



(b) Matrices no distribuidas con la medida de Haar

Figura 4.3: Histogramas de los argumentos (en radianes) de los valores propios de 1000 matrices aleatorias unitarias 100×100 . Realizado con Matlab.

Es precisamente con esta condición, con la que ilustramos que el hecho de no considerar la única factorización QR de una matriz $Z \in \text{CGE}$, implica que la matriz resultante Q no está distribuida con la medida de Haar. En la Figura (4.3b), hemos llevado a cabo el mismo procedimiento que en (4.3a), con la diferencia de que en este último caso, no hemos considerado la única factorización QR tal que los elementos de la diagonal de R son estrictamente positivos. Apreciamos como en este caso, los argumentos de los valores propios de estas matrices no están uniformemente distribuidos. Nótese que esto puede ser interesante en ocasiones para tener una idea de cuando las matrices resultantes son o no, realizaciones de matrices aleatorias distribuidas con la medida de Haar.

Bibliografía

- [1] G.W Anderson, A.Guionnet y O.Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambrigde University Press, 2001.
- [2] F.Chapon, *Introduction to random matrices*, Universidad de Havana, 2012. Disponible en: <https://www.math.univ-toulouse.fr/~fchapon/rmt-cuba.pdf>.
- [3] J.A Cuesta, *Cálculo de probabilidades*, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, Santander, España.
- [4] M.J Deiana, *Estructuras para el conjunto de matrices inversibles*, 2016.
- [5] P. Diaconis, *Patterns in Eigenvalues: the 70th Josiah Willard Gibbs Lecture*, Bull. Amer. Math. Soc., 2003.
- [6] P.Diaconis, *What is a random matrix?*, Notices of the AMS, 2001. Disponible en: <https://www.ams.org/notices/200511/what-is.pdf>.
- [7] J.Diestel y A. Spaldbury, *The Joys of Haar measure*, American Mathematical Soc., 2014.
- [8] M.L Eaton, *Multivariate Statistics: A Vector Space Approach*, Wiley, New York, 1983.
- [9] A. Edelman y N. Raj Rao, *Random Matrix Theory*, Cambrigde University Press, 2005. Disponible en: <https://web.eecs.umich.edu/~rajnrao/Acta05rmt.pdf>.
- [10] L.Erdős y H.T Yau, *A Dinamical Approach to Random Matrix Theory*, American Mathematical Soc., New York, 2017.
- [11] A. Ganguly, *Lectures 6-7: Marchenko-Pastur Law*, 2009. Disponible en: http://www.math.wisc.edu/~valko/courses/833/2009f/lec_6_7.pdf.
- [12] J. Gleason, *Existence and Uniqueness of Haar Measure*, 2010. Disponible en: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Gleason.pdf>.
- [13] P. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, Vol. 18, New York, 1974.
- [14] J.P. Keating, *Random matrices and the Riemann Zeta-function a review*, School of Mathematics, University of Bristol, 2003. Disponible en: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.566.3814&rep=rep1&type=pdf>.
- [15] T. Kemp, *Introduction to Random Matrix Theory*, 2006. Disponible en: <http://www.math.ucsd.edu/~tkemp/247A.Notes.pdf>.
- [16] A. Klenke, *Pobability Theory: A Comprehensive Course*, Springer Science Business Media, 2007.
- [17] E.S. Meckes, *The Random Matrix Theory of the Compact Classical Groups*, Cambrigde University Press, 2019.

- [18] M.L Mehta, *Random Matrices*, Third Edition, Academic Press, New York, 1991.
- [19] F. Mezzadri, *How To Generate Random Matrices from the classical compact groups*, Notices of AMS, 2007. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/math-ph/0609050.pdf>.
- [20] H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function* *Analytic number theory*, American Mathematical Society, 1973.
- [21] J.A Sánchez y V. Amaya, *Uniqueness of the Gaussian Ortogonal Ensemble*, 2017. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/1901.09257.pdf>.

Apéndice A

Código

A continuación, se incluye una copia del código implementado:

```
1 function semicirlaw(n)
2
3 %OBJETIVO: SEMICIRLAW representa el histograma de la funcion de
4 %          densidad empirica de los valores propios de una
5 %          realizacion de una matriz aleatoria nxn de la
6 %          Colectividad Gaussiana Ortogonal, y en rojo , la
7 %          grafica de la funcion de densidad de la distribucion
8 %          del semicirculo .
9 %EN ENTRADA:
10 %      n      la dimension de la matriz
11
12
13
14 x=[ -2:0.2:2];
15 % Generamos una matriz nxn del GOE
16 X=randn(n) ;
17 A=(X+X') / sqrt(2) ;
18
19 % Normalizamos la matriz dividiendo entre raiz de n
20 A=(1/sqrt(n))*A;
21
22 % Calculamos los valores propios de A
23 v=eig(A) ;
24
25 % Histograma los valores propios de A
26 histogram(v, 'Normalization', 'pdf')
27 hold on;
28
29 % Grafica distribucion del semicirculo
30 plot(x, sqrt(4-x.^2)/(2*pi), 'Linewidth',3);

1 function circlaw(n,k)
2
3 %OBJETIVO: CIRCLAW representa los valores propios de k realizaciones
4 %          de una matriz aleatoria nxn de la Colectividad de Ginibre
```

```

5 %           Compleja y compara la imagen con la circunferencia unidad.
6 %EN ENTRADA:
7 %      n      la dimension de la matriz
8 %      k      numero de iteraciones
9
10 for j=1:k
11     % Generamos una matriz nxn de la colectividad de Ginibre
12     Z=(1/sqrt(2))*randn(n)+1i*(1/sqrt(2))*randn(n);
13     Zn=(1/sqrt(n))*Z;
14     % Calculamos los valores propios de Zn
15     p(:,j)=eig(Zn);
16     p1(:,j)=real(p(:,j));
17     p2(:,j)=imag(p(:,j));
18
19 end
20 x=reshape(p1,[],1);
21 y=reshape(p2,[],1);
22 figure(1)
23 % Representamos los valores propios de Zn
24 scatter(x,y);
25 hold on
26 % Representamos la circunferencia unidad
27 t =[0:pi/50:2*pi];
28 plot(cos(t), sin(t), 'LineWidth',3);

1 function pointsuc(n)
2
3 %OBJETIVO: POINTSUC representa los valores propios de una realizacion
4 %          de una matriz aleatoria de dimension n distribuida con la
5 %          medida de Haar y n puntos al azar en la circunferencia
6 %          unidad.
7 %EN ENTRADA:
8 %      n      la dimension de la matriz.
9
10 % Generamos una matriz nxn del CGE
11 A=(1/sqrt(2))*randn(n)+1i*(1/sqrt(2))*randn(n);
12
13 % Obtenemos la matriz Q de la unica factorizacion QR de A tal que
14 % Rii>0
15 [q,r]=qr(A);
16 Q=q*diag(sign(diag(r)));
17
18 % Calculamos y representamos los valores propios de Q
19 p=eig(Q);
20 p1=real(p);
21 p2=imag(p);
22 figure(1)
23 scatter(p1,p2);
24 axis off
25

```

```

26 % Generamos n puntos aleatorios en la circunferencia unidad
27 a=2*pi*rand(n,1);
28 q1=cos(a);
29 q2=sin(a);
30 figure(2)
31 scatter(q1,q2);
32 axis off

1 function anglesQ(n,k)
2
3 %OBJETIVO: anglesQ determina los histogramas de la funcion de
4 %          densidad empirica de los argumentos (en radianes)
5 %          de los valores propios de k realizaciones de una
6 %          matriz aleatoria unitaria distribuida con la medida
7 %          de Haar y de los argumentos (en radianes) de los
8 %          valores propios de k realizaciones de una matriz
9 %          aleatoria unitaria no distribuida con la medida de
10 %          Haar en U(n).
11
12 %EN ENTRADA:
13 %    n      la dimension de las matrices
14 %    k      numero de iteraciones
15
16
17 for m=1:k
18
19     % Generamos una matriz nxn del CGE
20     A=(1/sqrt(2))*randn(n)+1i*(1/sqrt(2))*randn(n);
21
22     % Obtenemos la matriz una factorizacion QR de A
23     [q,r]=qr(A);
24     Q=q*diag(sign(diag(r))); %Q esta distribuida con la medida de
25     % Haar
26     % Calculamos los valores propios de las matrices Q y q
27     p(:,m)=eig(Q);
28     e(:,m)=eig(q);
29
30     %Y los argumentos (en radianes) de los valores propios de ambas
31     % matrices
32     angles1(:,m)=angle(p(:,m));
33     angles2(:,m)=angle(e(:,m));
34     x=reshape(angles1,[],1);
35     y=reshape(angles2,[],1);
36 end
37
38 % Histograma de los argumentos de los valores propios de Q
39 figure(1)
40 histogram(x,'Normalization','pdf')
41
42 % Histograma de los argumentos de los valores propios de q

```



```
43 figure(2)
44 histogram(y, 'Normalization', 'pdf');
```